

3 Zákon podobnosti a růstu

Jeden z významných závěrů výkonové rovnice je fakt, že jsme-li omezeni určitým rozměrem, například průměrem stroje, lze další nárůst výkonu při konstantní rychlosti stroje realizovat pouze navyšováním jeho délky. Naopak při požadavku na mírné snížení výkonu stroje lze využít již dříve připravený návrh stroje a modifikovat pouze jeho délku, abychom obdrželi nový typ stroje. Tento přístup přináší řadu nejen ekonomických výhod – kromě značné úspory času pro přípravu nového návrhu stroje, jeho zavádění do výroby a podobně, lze na základě předchozích zkušeností i velmi přesně předpovědět vlastnosti takového „nového“ typu stroje.

Nastíněný princip je obecně označován jako zákon podobnosti a růstu a běžně se využívá pro rychlý cenový odhad pro výrobu nového stroje. Na základě podobnosti rozměrů s jinými stroji ve výrobě tak lze určit s poměrně velkou přesností náklady na výrobu nového stroje a zároveň lze i jeho prvotní návrh provést s velmi dobrou přesností na základě zkušeností s dříve vyrobenými typy podobných strojů.

Podle možností a vlastností původního stroje lze vývoj nového typu vést v zásadě třemi možnými směry, které zaručí podobnost s dříve vyrobenými typy. Protože v rámci návrhu existuje řada parametrů, které mohou více či méně zasáhnout do vlastností výsledného stroje, předpokládejme nyní zafixování těch zásadních – rychlosti stroje n , počtu pólů stroje $2p$, indukce ve vzduchové mezeře B_δ a činitelů pólového krytí α_δ , tvaru magnetického pole k_B , vinutí k_{v1} a elektromotorické síly k_E . Jako proměnné parametry nám zůstávají průměr kotvy stroje D_1 a jeho délka l . Předpokládejme nahrazení obou těchto rozměrů jednotným délkovým rozměrem x , který bude reprezentovat velikost neznámého stroje l_x vůči velikosti známého stroje l_1 v poměrných jednotkách:

$$x = \frac{l_x}{l_1} [p.u.] \quad (3.1)$$

Z ostatních parametrů zbývají jako proměnné pouze proudové hustoty strojem – lineární proudová hustota A a proudová hustota vinutí J . Předpokládejme nyní následující možnosti vývoje nového typu elektrického stroje:

- 1) konstantní lineární proudovou hustotu A , proměnnou proudovou hustotu vinutím J
- 2) konstantní proudovou hustotu J , proměnnou lineární proudovou hustotu A
- 3) jako kompromisní řešení položíme A úměrné odmocnině z rozměru x (důvod této volby viz dále)

3.1 Vlastnosti řady strojů s identickou lineární proudovou hustotou A

Zachováním velikosti lineární proudové hustoty strojem dochází k zafixování poslední proměnné z Essonova činitele, tzn. bude platit, že

$$C = \frac{\pi^2}{60} \alpha_\delta B_\delta A k_{v1} k_B = konst. \quad (3.2)$$

Podle výkonové rovnice bude výkon stroje růst s třetí mocninou rozměru x , neboť

$$S_i = C D_1^2 l n \simeq x^2 \cdot x = x^3 . \quad (3.3)$$

Proud jednou drážkou stroje I_d je však dán drážkovou roztečí t_d a lineární proudovou hustotou, tzn.

$$I_d = A t_d , \quad (3.4)$$

kde drážková rozteč je dána průměrem stroje, který ale může růst, takže

$$t_d = \frac{\pi D_1}{Q} \simeq x \quad (3.5)$$

a tedy proud drážkou je úměrný součinu Ax .

Z hlediska proudové hustoty lze pak proud drážkou zapsat jako

$$I_d = S_d J , \quad (3.6)$$

kde plocha drážky je dána součinem její šířky a výšky, tedy rozměry škálovanými (při konstantním počtu drážek) společně s průměrem stroje. Pro její plochu tedy platí

$$S_d = b_d h_d \simeq x \cdot x = x^2 \quad (3.7)$$

a proud drážkou bude úměrný Jx^2 . Odtud vyplývá relace

$$Ax \simeq Jx^2 , \quad (3.8)$$

ze které lze pro konstantní A odvodit

$$J \simeq \frac{1}{x} . \quad (3.9)$$

Tedy s rostoucími rozměry stroje klesá proudová hustota strojem, což se může mimo jiné projevit i nižším využitím materiálu vinutí a vyšší hmotností stroje.

3.2 Vlastnosti řady strojů s identickou proudovou hustotou J

Zafixujeme-li v rámci řady strojů proudovou hustotu jejich vinutím J , lze ekvivalentně k (3.9) psát, že

$$A \simeq Jx \quad (3.10)$$

a tedy pro konstantní J je

$$A \simeq x . \quad (3.11)$$

Stejným způsobem je tím pádem úměrný i Essonův činitel, pro výkon a moment stroje tedy bude platit

$$M \simeq S_i = C D_1^2 l n \simeq x \cdot x^2 \cdot x \simeq x^4 . \quad (3.12)$$

V tomto případě již bude výkon stroje růst se čtvrtou mocninou jeho rozměrů, nicméně v důsledku zvětšujících se rozměrů drážky se mohou začít objevovat problémy s jejím chlazením.

3.3 Vlastnosti řady strojů lineární proudovou hustotou úměrnou $\sqrt{x}$

V případě, že bude, jakožto kompromisní řešení mezi předchozími variantami, lineární proudová hustota strojem úměrná odmocnině z délkové jednotky stroje, lze stejnou úvahou jako v předchozím případě odvodit, že této hodnotě bude úměrný i Essonův činitel navrhované řady C , a pro moment a výkon stroje bude platit relace

$$M \simeq S_i = C D_1^2 l n \simeq \sqrt{x} \cdot x^2 \cdot x \simeq x^{3.5} . \quad (3.13)$$

Navrhovaná řada pak bude mít částečně výhody i nevýhody obou dříve zmíněných přístupů, přičemž vhodnost její aplikace lze posoudit na základě porovnání dalších parametrů stroje.

3.4 Porovnání jednotlivých přístupů k návrhu výkonových řad strojů

Pro dokončení porovnání jednotlivých přístupů je ovšem třeba přejít od čistě výkonových parametrů též k ekonomickým ukazatelům, jako je samotná cena navrženého stroje, či jeho specifická hmotnost, tj. poměr hmotnosti a výkonu stroje, který je často v dnešní době zákazníky vyzdvihován. V předchozím textu již byly položeny předpoklady a odvozeny závěry pro lineární proudovou hustotu stroje A , proudovou hustotu vinutím J , výkon a moment stroje M , P a Essonův činitel C . Hmotnost stroje jako taková bude v rámci řady narůstat úměrně objemu stroje, při použití identických materiálů pak bude stejným způsobem narůstat i cena stroje. Lze tedy psát

$$m, c \simeq V \simeq x^3 . \quad (3.14)$$

Dalším parametrem porovnání může být výše zmiňovaná specifická hmotnost stroje. Ta je dána poměrem hmotnosti stroje ku jeho zdánlivému výkonu, tj.

$$m_s = \frac{m}{S} , \quad (3.15)$$

přičemž výkon stroje je odlišný pro každý z uvedených přístupů.

Z tepelného hlediska jsou významné ztráty ve vinutí stroje. Ty lze zjednodušeně určit jako

$$\Delta P_j \simeq R I^2 \simeq \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l_v}{S_d} \cdot (J S_d)^2 \simeq \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{x}{x^2} \cdot J^2 x^4 \simeq J^2 x^3 . \quad (3.16)$$

V tomto parametru se budou opět jednotlivé přístupy díky odlišnosti proudové hustoty J odlišovat.

Další významnou komponentou jsou ztráty v železe. Ty jsou obecně úměrné hmotnosti stroje a při konstantním sycení stroje nedochází k jejich dalším změnám, tzn. lze psát

$$\Delta P_{Fe} \simeq \Delta p_{Fe} m_{Fe} \simeq x^3 . \quad (3.17)$$

Celkové ztráty stroje lze pak velmi zjednodušeně považovat za průměr mezi ztrátami ve vinutí stroje a v jeho železe a budou opět specifické pro každý z řešených přístupů.

Účinnost stroje lze posoudit na základě poměrných ztrát, ty můžeme definovat na základě předchozích výsledků jako

$$\Delta p = \frac{\Delta P}{S} . \quad (3.18)$$

Tyto ztráty jsou pak odváděny přes vnější povrch stroje, který je úměrný druhé mocnině lineárního rozměru stroje, tj.

$$F \simeq x^2 . \quad (3.19)$$

Oteplení stroje pak můžeme brát jako poměr mezi ztrátami stroje a jeho chladícím povrchem

$$\Delta \vartheta = \frac{\Delta P}{F} . \quad (3.20)$$

Pro často rozebíhané stroje je významným parametrem doba rozběhu, kterou lze odvodit ze vztahu pro moment stroje

$$M = J \frac{d\omega}{dt} \quad (3.21)$$

a tedy vzít ji jako poměr

$$t = \frac{J}{S} , \quad (3.22)$$

přičemž moment setrvačnosti rotoru lze zjednodušeně vzít jako

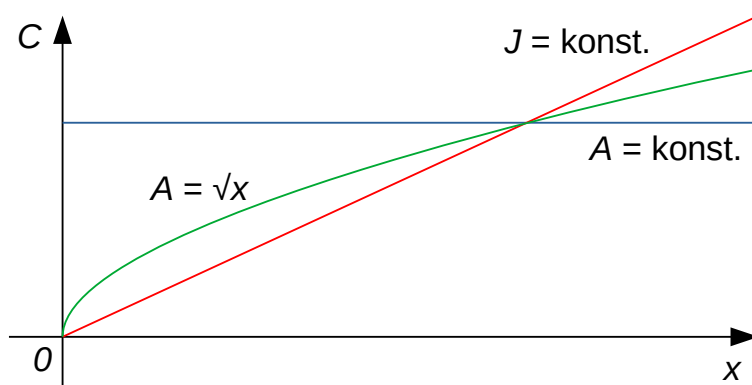
$$J = \frac{1}{2} m r^2 \simeq x^3 \cdot x^2 \simeq x^5 , \quad (3.23)$$

a doba rozběhu stroje řady navržené dle příslušných zákonitostí bude

$$t = \frac{x^5}{S} . \quad (3.24)$$

Přehled obdržených výsledků je pak obsažen v Tab. 3.1. Výhodnější výsledky jsou zde zvýrazněny tučným písmem, zatímco méně výhodné jsou potlačeny šedou barvou textu. Z porovnání vyplývá, že návrh výkonové řady s konstantní lineární proudovou hustotou A vede na řadu strojů s konstantní specifickou hmotností, ale i konstantním oteplením. Tento způsob návrhu vede na robustní stroje s dobře předpověditelným oteplením a je často uplatňován pro průmyslové motory.

Naproti tomu návrh výkonové řady za předpokladu udržení konstantní proudové hustoty J vede u větších motorů k poklesu specifické hmotnosti, ale nárůstu oteplení. To lze kompenzovat kvalitním chlazením, nicméně výhoda v poklesu specifické hmotnosti je hlavní předností tohoto přístupu, což jej předurčuje pro vývoj řad motorů určených pro elektrickou trakci, kde je specifická hmotnost velmi sledovaným parametrem.



Obr. 3.1: Závislost Essonova činitele na lineárním rozměru stroje x

Poslední ze zmiňovaných přístupů pak tvoří jakýsi konzervativní průměr mezi oběma dříve zmiňovanými. Ani v jednom parametru jej nelze označit za vítězný, stejně tak ani v jediném parametru není nevýhodný. Právě z tohoto důvodu je tento způsob návrhu výkonových řad upřednostňovaný u malých průmyslových strojů. Další pozitivum tohoto přístupu pak vyplývá z grafického porovnání růstu Essonova činitele v závislosti na rozměru stroje x (Obr. 3.1). Zde se ukazuje, že při uvažování nárůstu lineární proudové hustoty dle $\sqrt{x}$ roste u strojů malých rozměrů Essonův činitel značně rychleji, než když je uvažována konstantní proudová hustota vinutí J .

Veličina	Označení	Vztah	Způsob vývoje řady		
			$A = \text{konst.}$	$J = \text{konst.}$	$A = \sqrt{x}$
Lineární proudová hustota	A	ad hoc	konst.	x	$\sqrt{x}$
Proudová hustota	J	(3.8)	$1/x$	konst.	$1/\sqrt{x}$
Výkon, moment	S, M	(3.3)	x^3	x^4	$x^{3.5}$
Essonův činitel	C	(3.2)	konst.	x	$\sqrt{x}$
Hmotnost, cena	m, c	(3.14)	x^3	x^3	x^3
Specifická hmotnost	m_s	(3.15)	konst.	$1/x$	$1/\sqrt{x}$
Ztráty ve vinutí	ΔP_j	(3.16)	x	x^3	x^2
Ztráty v železe	ΔP_{Fe}	(3.17)	x^3	x^3	x^3
Celkové ztráty	ΔP	---	x^2	x^3	$x^{2.5}$
Poměrné ztráty	Δp	(3.18)	$1/x$	$1/x$	$1/x$
Chladicí povrch	F	(3.19)	x^2	x^2	x^2
Oteplení	$\Delta \vartheta$	(3.20)	konst.	x	$\sqrt{x}$
Doba rozběhu	t	(3.24)	x^2	x	$x^{1.5}$

Tab. 3.1: Porovnání vlastností strojů výkonových řad navržených odlišnými přístupy

3.5 Odhad hmotnosti skupiny strojů, nárůst hmotnosti stroje při nárůstu výkonu

Jak vyplývá z předchozích úvah, v případě uvažování konstantní proudové hustoty vinutím je výkon stroje úměrný čtvrté mocnině jeho rozměrů, rozměry stroje jsou tedy naopak úměrné čtvrté odmocnině výkonu stroje

$$x = \sqrt[4]{S} \quad (3.25)$$

Hmotnost stroje je přitom úměrná třetí mocnině jeho rozměrů, tzn.

$$m \simeq x^3 \simeq \left(\sqrt[4]{S}\right)^3 \simeq \sqrt[4]{S^3} \quad (3.26)$$

Budeme-li mít skupinu n strojů o určitém výkonu, bude jejich hmotnost úměrná

$$m_{sk} \simeq n m \simeq n \sqrt[4]{S^3} \quad (3.27)$$

Navrhujeme-li ale jediný stroj o n -krát vyšším výkonu, bude jeho velikost

$$x = \sqrt[4]{nS} \quad (3.28)$$

a hmotnost naroste na

$$m_1 \simeq x^3 \simeq \sqrt[4]{(nS)^3} \quad (3.29)$$

Porovnáme-li obě hodnoty, roste hmotnost skupiny strojů vůči jedinému stroji v poměru

$$k = \frac{m_{sk}}{m_1} = \frac{n \sqrt[4]{S^3}}{\sqrt[4]{(nS)^3}} = \frac{n}{n^{\frac{3}{4}}} = n^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{n} \quad (3.30)$$

Dva stroje o výkonu ekvivalentním k jedinému stroji tak budou 1,19x těžší, nežli jediný stroj, v případě tří strojů již bude poměr hmotností 1,32 atd. Je tedy zřejmé, že z hlediska hmotnosti je výhodnější mít jediný stroj o vyšším výkonu, nežli skupinu strojů o výkonech nižších.

Pokusme se nyní vyhodnotit účinnost strojů v závislosti na jejich výkonu. Předpokládejme stroje o poměru výkonů

$$\frac{S_2}{S_1} = 2 \quad (3.31)$$

Poměr jejich rozměrů pak vyjde

$$k = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}} = \sqrt[4]{\frac{S_2}{S_1}} = \sqrt[4]{2} = 1,19 \quad (3.32)$$

a nárůst hmotnosti bude třetí mocninou nárůstu rozměrů, tedy

$$m = k^3 = 1,19^3 = 1,68 \quad (3.33)$$

Třetí mocnině pak jsou úměrné i celkové ztráty v obou strojích, lze tedy za předpokladu $P = S$ porovnat jejich účinnosti jako

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\frac{2S_1 - 1,68\Delta P}{2S_1}}{\frac{S_1 - \Delta P}{S_1}} = \frac{S_1 - 0,84\Delta P}{S_1 - \Delta P} \quad (3.34)$$

Tudíž s růstem velikostí a výkonu strojů roste i jejich účinnost.