



Termomechanika – cvičení 8

reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Obsah

1. zákon termodynamiky pro kontrolní objem

Dynamika proudících plynů

Předpoklady

Kritická rychlost a její určení

Kritický tlakový spád a jeho určení



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

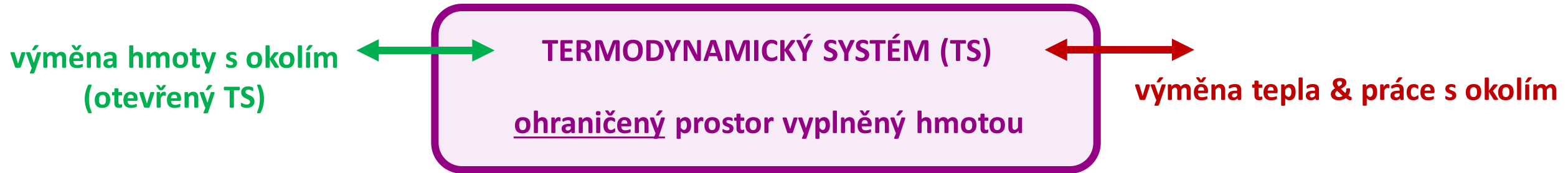
1. ZÁKON TERMODYNAMIKY PRO KONTROLNÍ OBJEM



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Uvažujme kontrolní objem („otevřený TS“)



Změna energie 1 kg proudícího plynu de :

$$de = du + d(pv) + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + d(gy)$$

Diagrammatic annotations with arrows pointing to the terms in the equation:

- du : změna vnitřní energie
- $d(pv)$: změna energie proudu
- $d\left(\frac{w^2}{2}\right)$: změna kinetické energie
- $d(gy)$: změna potenciální energie

Změna energie 1 kg proudícího plynu de je dána vlivem vnějších účinků – přívod tepla a tedy odvod technické práce:

$$de = dq - da_t$$



Platí tedy:

$$dq - da_t = du + d(pv) + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + d(gy)$$
$$dq = \underbrace{du + pdv + vdp}_{dh} + wdw + gdy + da_t$$

1. zákon termodynamiky pro kontrolní objem

$$dq = dh + wdw + gdy + da_t$$

přivedené nebo odvedené teplo [$J\ kg^{-1}$]

změna entalpie [$J\ kg^{-1}$]

změna kinetické energie [$J\ kg^{-1}$]

přivedená nebo odvedená technická práce [$J\ kg^{-1}$]

změna potenciální energie [$J\ kg^{-1}$]



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

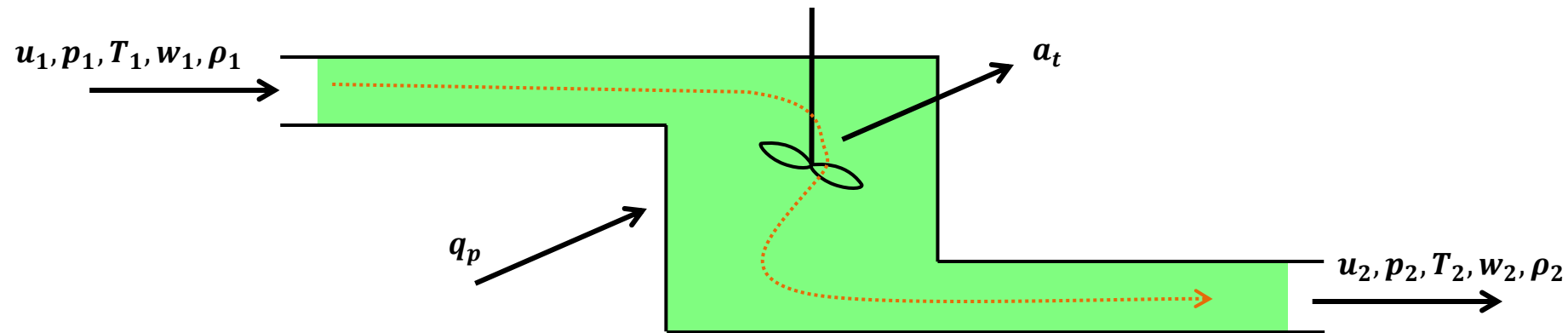
Různé formy 1. zákona termodynamiky pro kontrolní objem

$$dq = du + wdw + gdy + d(pv) + da_t$$

$$dq = du + wdw + gdy + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + da_t$$

$$dq = dh + wdw + gdy + da_t$$

Pozn.: aplikace 1. zákona termodynamiky pro kontrolní objem



$$q_p + u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w_1^2}{2} + gy_1 = a_t + u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{w_2^2}{2} + gy_2$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

DYNAMIKA PROUDÍCÍCH PLYNŮ



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

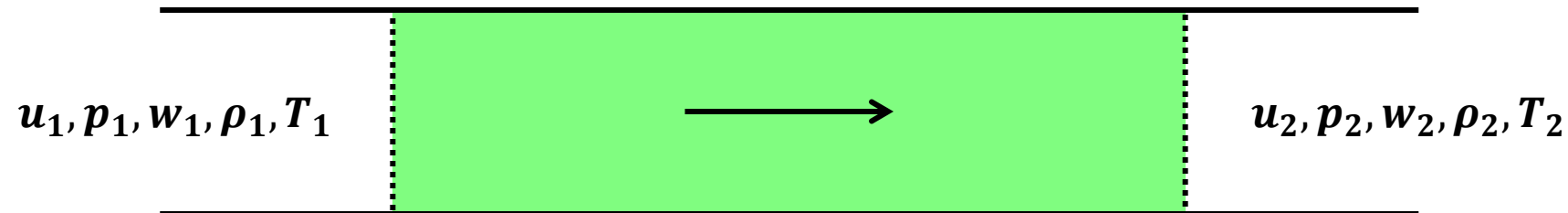


Proudícím médiem je ideální plyn

- Nevazký
- Dokonale stlačitelný
- Měrné tepelné kapacity c_p, c_v jsou konstantní (tj. nejsou funkcí teploty)

Při proudění ideálního plynu si zavedeme tyto předpoklady:

- Proudění je beze ztrát energie proudu – bez vnitřního tření a turbulence
- Nedochází k výměně tepla s okolím ($dq = 0$)
- Proudění probíhá ve vodorovné rovině ($dy = 0$)
- Práce ze soustavy není odváděna ani není soustavě přiváděna ($da_t = 0$)



Aplikace 1. zákona termodynamiky

1. zákon termodynamiky pro kontrolní objem

$dq = dh + wdw + gdy + da_t$

$=0$... neuvažujeme přívod ani odvod tepla (pointing to dq)

$=0$... neuvažujeme přívod ani odvod technické práce (pointing to da_t)

$=0$... uvažujeme proudění ve vodorovné rovině (pointing to gdy)

po integraci mezi vstupem (1) a výstupem (2)

$$0 = dh + wdw$$
$$0 = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

Jelikož se zabýváme dynamikou plynů, budeme se zaměřovat na veličiny, které s dynamikou souvisí. Nejprve to bude rychlost. Rychlost na výstupu z kontrolního objemu vyjádříme z výše uvedené rovnice.



Rychlost na výstupu z kontrolního objemu w_2 :

$$w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2) + w_1^2}$$

$$dh = c_p dT \rightarrow h_1 - h_2 = c_p(T_1 - T_2) = \frac{\kappa r}{\kappa - 1} (T_1 - T_2)$$

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + w_1^2}$$

Zavedli jsme předpoklad, že během proudění nedochází k výměně tepla s okolím ($dq = 0$), a tudíž se jedná o adiabatický děj. Poměr teplot T_2/T_1 můžeme tedy nahradit poměrem tlaků či měrných objemů (viz cvičení 4):

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right) + w_1^2}$$

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1}\right) + w_1^2}$$



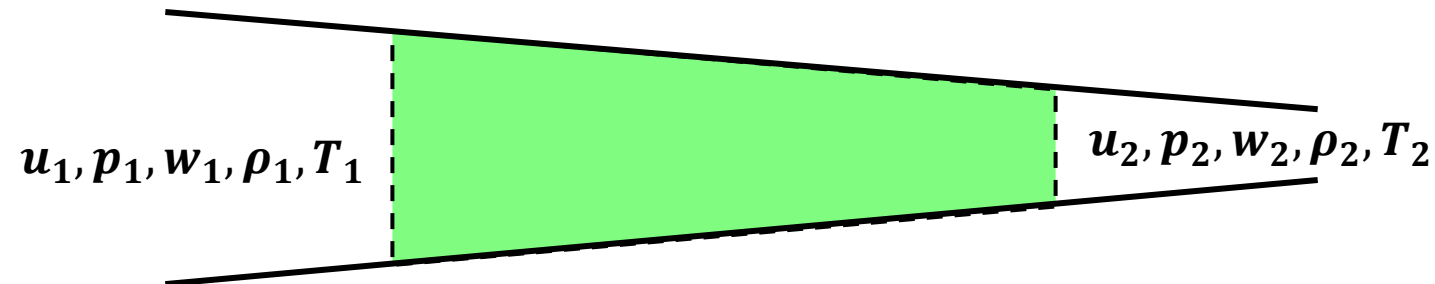
Z rovnic pro rychlost na výstupu z kontrolního objemu vyplývá zásadní skutečnost. K tomu, aby byla rychlost na výstupu různá od rychlosti na vstupu, je nutné, aby se teploty, tlaky i měrné objemy na vstupu a výstupu lišily, jinak rychlost na výstupu z kontrolního objemu bude stejná jako na vstupu.

$$T_1 = T_2 \Rightarrow w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + w_1^2} = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 (1 - 1) + w_1^2} = w_1$$

$$p_1 = p_2 \Rightarrow w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right) + w_1^2} = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 (1 - 1) + w_1^2} = w_1$$

$$v_1 = v_2 \Rightarrow w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1}\right) + w_1^2} = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 (1 - 1) + w_1^2} = w_1$$

Jelikož předpokládáme, že během proudění nedochází k výměně tepla s okolím ($dq = 0$), dále předpokládáme, že se nepřivádí ani neodvádí práce ($da_t = 0$), je zapotřebí změnit geometrii kanálu, abychom dosáhli rozdílných stavových parametrů na vstupu a výstupu, např. takto:

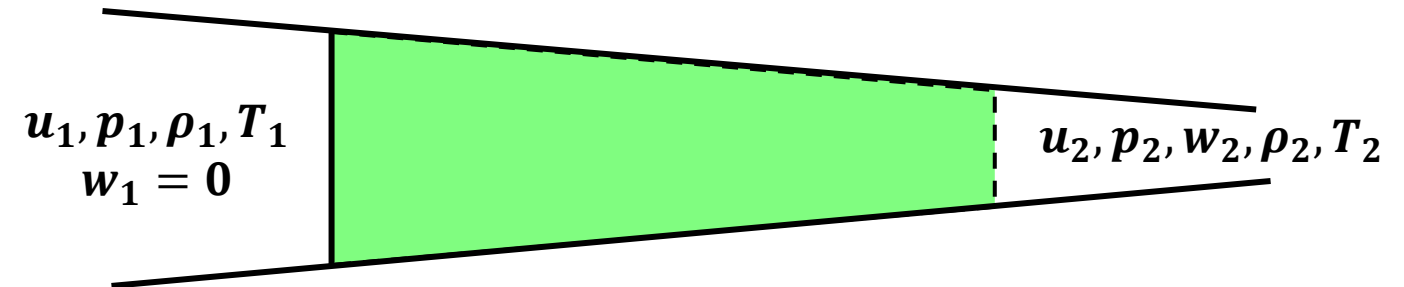


Dosud jsme se zabývali případem, kdy je kontrolní objem otevřen z obou stran. Může ovšem nastat i případ, kdy by kontrolní objem byl z jedné strany uzavřen a plyn by z kontrolního objemu pouze vytékal. Pak by počáteční rychlost $w_1 = 0$ a předcházející rovnice by se tedy zjednodušily:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)}$$

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)}$$

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa - 1} \right)}$$



Pokud by hodnoty teplot a tlaků na vstupu a výstupu byly shodné, pak výstupní rychlost $w_2 = 0$, a tudíž k žádnému proudění na výstupu z kontrolního objemu nedojde. Stejně tak by tomu bylo i v případě, že by se rovnaly hodnoty měrných objemů na vstupu a výstupu.



Kritická rychlost

Rychlost na výstupu z kontrolního objemu má svá omezení a není možné ji zvyšovat donekonečna. Tato omezení jsou dána tvarem dýzy a tlakovým spádem v ní. Důležitým pojmem je tzv. kritická rychlost.

Kritická rychlost

- Kritická rychlost w_k je taková rychlost w_2 , která je rovna rychlosti zvuku v daném průřezu.

$$a = \sqrt{\kappa r T}$$

rovnici umocníme

$$w_k = w_2 = a_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + w_1^2} = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 - 2 \frac{\kappa r T_2}{\kappa - 1} + w_1^2}$$

$\kappa r T_2 = a_2^2 = w_k^2$

členy s w_k převedeme na jednu stranu rovnice a vytkneme

$$w_k^2 = \frac{2\kappa r}{\kappa - 1} T_1 - \frac{2w_k^2}{\kappa - 1} + w_1^2$$

$$w_k^2 \left(1 + \frac{2}{\kappa - 1}\right) = \frac{2\kappa r}{\kappa - 1} T_1 + w_1^2$$

z rovnice vyjádříme w_k

$$w_k = \sqrt{\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} + w_1^2 \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)}$$



Odvodili jsme kritickou rychlost proudění pro případ nenulové počáteční rychlosti ($w_1 \neq 0$)

- Pokud bychom uvažovali výtok z uzavřené nádoby, pak by kritická rychlost byla následující:

$$w_k = \sqrt{\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1}}$$

Kritická rychlost je maximální dosažitelná rychlost v zužujícím se (konvergentním) kontrolním objemu (dýze).

- ... a je rovna místní rychlosti zvuku
- k dosažení vyšších (nadzvukových) rychlostí je třeba speciálního tvaru dýzy, který má například Lavalova dýza

Jak je vidět z rovnice, tak hodnota kritické rychlosti závisí na druhu proudícího média a na teplotě, na které je závislá i rychlost zvuku. Proto jsme pro tento výpočet použili rovnici, která obsahovala hodnoty teplot. Samozřejmě ke změně rychlosti proudu je potřebné, aby byly teploty na vstupu a výstupu z kontrolního objemu různé. Jak bylo zmíněno výše, je třeba, aby i tlaky a objemy na vstupu a výstupu z kontrolního objemu byly rozdílné.



Kritický tlakový spád

Jestliže kritické rychlosti proudění dosahujeme při určitém rozdílu teplot, tak musí existovat i určitý rozdíl tlaků, při kterém se této kritické rychlosti dosáhne. Tento poměr tlaků nazýváme kritickým tlakovým spádem.

Vyjadřuje poměr tlaků, při kterém se dosáhne kritické rychlosti proudění

Již v předchozím jsme si uvedli, že hodnota kritické rychlosti je rovna rychlosti zvuku na výstupu ze zúženého kontrolního objemu:

$$w_k = w_2 = a_2$$

Rovnice pro w_k i w_2 máme již vyjádřené, a tudíž je můžeme dát do rovnosti:

$$w_k = w_2$$

rovnici umocníme a členy s w_1^2 převedeme na jednu stranu rovnice

$$\sqrt{\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} + w_1^2 \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)} = \sqrt{\frac{2\kappa r T_1}{\kappa - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right) + w_1^2}$$
$$\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} + w_1^2 \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) - w_1^2 = \frac{2\kappa r T_1}{\kappa - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)$$



rovnici vydělíme členem $\frac{2\kappa r T_1}{\kappa - 1}$

$$\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} + w_1^2 \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) - w_1^2 = \frac{2\kappa r T_1}{\kappa - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)$$

osamostatníme člen $\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$

$$\left(\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} + w_1^2 \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) - w_1^2 \right) \frac{\kappa - 1}{2\kappa r T_1} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = 1 - \underbrace{\left(\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} + w_1^2 \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) - w_1^2 \right) \frac{\kappa - 1}{2\kappa r T_1}}$$

upravíme závorku na pravé straně rovnice

$$\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} + \frac{w_1^2 (\kappa - 1)}{\kappa + 1} - \frac{w_1^2 (\kappa + 1)}{\kappa + 1} = \frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} - \frac{2w_1^2}{\kappa + 1}$$

roznásobíme závorku na pravé straně rovnice

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = 1 - \left(\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} - \frac{2w_1^2}{\kappa + 1} \right) \frac{\kappa - 1}{2\kappa r T_1}$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = 1 - \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} - \frac{w_1^2 (\kappa - 1)}{(\kappa + 1) \kappa r T_1} \right)$$



závorku na pravé straně
rovnice formálně upravíme

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 - \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} - \frac{w_1^2(\kappa-1)}{(\kappa+1)\kappa r T_1}\right)$$
$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa r T_1 - w_1^2 \kappa - 1}{\kappa r T_1 \kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

- Odvodili jsme tedy rovnici pro kritický tlakový spád při nenulové vstupní rychlosti w_1 :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_k}{p_1} = \beta^* = \left(1 - \frac{\kappa r T_1 - w_1^2 \kappa - 1}{\kappa r T_1 \kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

- Pro případ nulové počáteční rychlosti w_1 (tj. výtok z uzavřené nádoby) se rovnice zjednoduší:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_k}{p_1} = \beta^* = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$



Z předchozích rovnic je možné vyjádřit tlak, který je v daném kritickém řezu:

$$p_k = p_1 * \beta^*$$

Dále je zřejmé, že když máme v daném průřezu kritickou rychlost a tedy i kritický tlakový spád, musí ideální plyn dle rovnice adiabaty dosáhnout kritického měrného objemu v_k a tedy i hustoty ρ_k . Z rovnice adiabaty si je jednoduše můžeme vyjádřit:

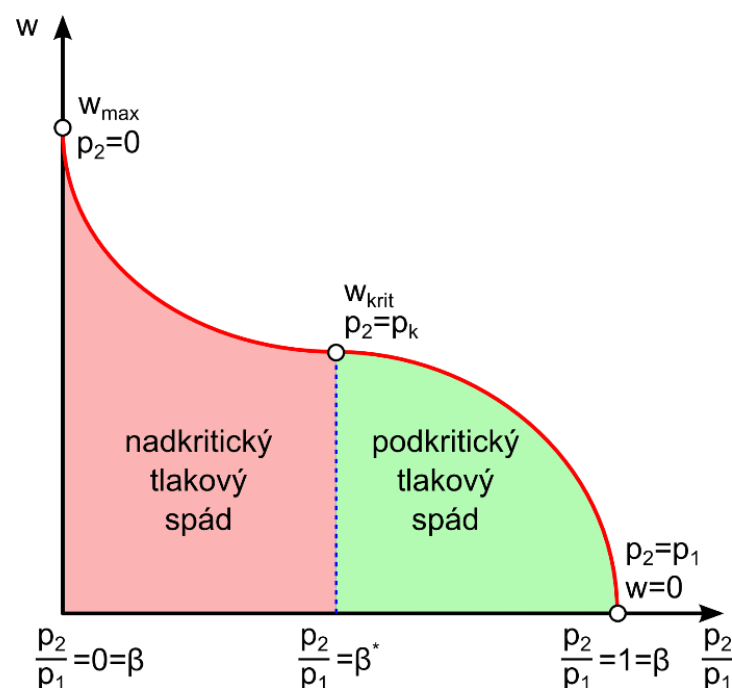
$$v_k = v_1 \left(\frac{p_1}{p_k} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\rho_k = \frac{1}{v_k}$$



Tlakový spád a rychlost

Mezi tlakovým spádem p_2/p_1 a rychlostí w existuje určitá funkční závislost. Výše zmíněný tlakový spád β^* a kritická rychlost w_k tvoří hraniční stavy. Propojenost tlakového spádu a rychlosti je reprezentována následujícím grafem:



Podkritický tlakový spád

$$\frac{p_2}{p_1} = \beta \geq \beta^* = \frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

Rychlost na výstupu z kontrolního objemu (dýzy) nepřekročí rychlost zvuku (v krajních případech jí dosáhne). Dýza může být konvergentní (zužující se).

Nadkritický tlakový spád

$$\frac{p_2}{p_1} = \beta \leq \beta^* = \frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

Rychlost na výstupu z kontrolního objemu (dýzy) může překročit rychlost zvuku (v krajních případech jí dosáhne). Pro překročení rychlosti zvuku musí být dýza konvergentně-divergentní.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Pro body vyznačené na grafu platí následující:

- $p_2 = p_1; w_1 = 0$
 - Pokud je tlak na výstupu z kontrolního objemu stejný jako tlak na vstupu, pak je tlakový spád roven 1 a výstupní rychlost je rovna rychlosti vstupní $\rightarrow$ tekutina v tomto případě neproudí, jelikož $w_1 = 0$
- $p_2 = p_1; w_1 \neq 0$
 - Pokud je tlak na výstupu z kontrolního objemu stejný jako tlak na vstupu, pak je tlakový spád roven 1 a výstupní rychlost je rovna rychlosti vstupní $\rightarrow$ tekutina v tomto případě proudí, jelikož $w_1 \neq 0$
- $p_2 = p_k; w_1 \neq 0 \vee w_1 = 0$
 - Pokud na výstupu z kontrolního objemu bude kritický tlak, pak rychlost na výstupu z kontrolního objemu bude kritická, tj. bude rovna místní rychlosti zvuku



- $p_2 = 0; w_1 = 0$

- Když je tlak na výstupu z kontrolního objemu roven nule (výtok do vakua; $p_2 = 0$), pak je i tlakový spád rovný nule ($\frac{p_2}{p_1} = 0$). Pro rychlost na výstupu z uzavřeného objemu pak platí:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)} = \sqrt{\frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 (1 - 0)} = w_{max}$$

- V tomto případě se tedy na výstupu docílí maximální možné rychlosti (může být vyšší než rychlost zvuku)

- $p_2 = 0; w_1 \neq 0$

- Když je tlak na výstupu z kontrolního objemu roven nule (výtok do vakua; $p_2 = 0$), pak je i tlakový spád rovný nule ($\frac{p_2}{p_1} = 0$). Pro rychlost na výstupu z uzavřeného objemu pak platí:

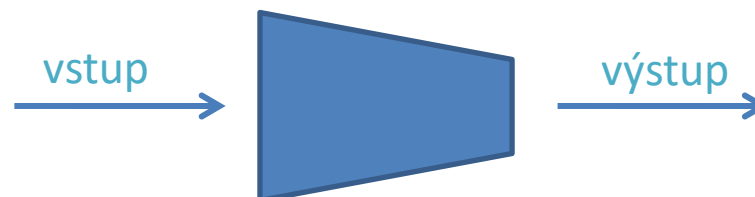
$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)} + w_1^2 = \sqrt{\frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 (1 - 0)} + w_1^2 = w_{max}$$

- V tomto případě se tedy na výstupu docílí maximální možné rychlosti (může být vyšší než rychlost zvuku)



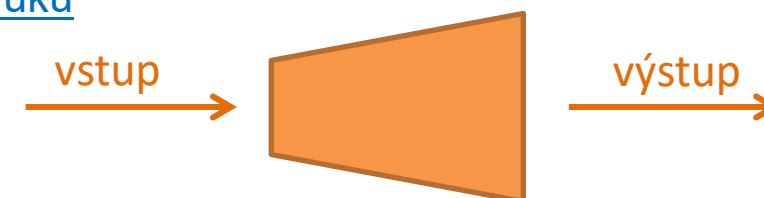
Dýzy

Konvergentní (zužující se)



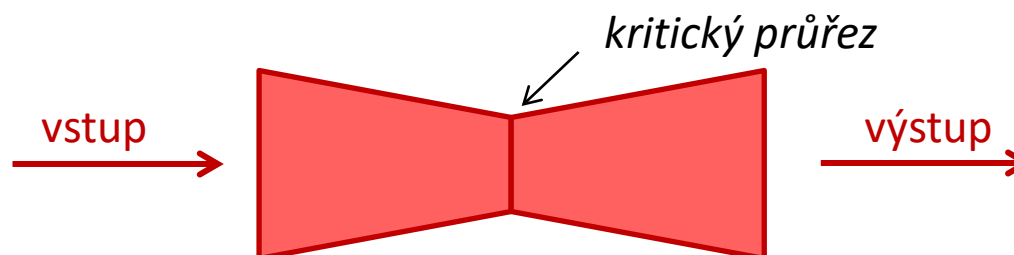
- Na vstupu je podzvuková rychlost; na výstupu lze dosáhnout nejvýše rychlosti zvuku

Divergentní (rozšiřující se) dýza



- Pokud je na vstupu alespoň rychlost zvuku; pak je na výstupu rychlost větší než na vstupu (tj. nadzvuková)

Konvergentně-divergentní dýza (Lavalova dýza)



- Na vstupu je podzvuková rychlost, která se v konvergentní části urychluje na rychlost rovnou rychlosti zvuku. Do divergentní části vstupuje proudění s rychlostí rovnou rychlosti zvuku a v této části Lavalovy dýzy se urychluje do nadzvukové rychlosti. V kritickém průřezu (nejužším místě) je tedy rychlost proudění rovna rychlosti zvuku.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Rovnice kontinuity (opakování z 1. cvičení)

Při ustáleném proudění (tj. proudění se v čase nemění) projde za jednotku času průřezy 1 a 2 stejné množství proudícího média. Toto množství vyjadřuje hmotnostní tok $\dot{m}$ a ve všech průřezech dýzy tedy nabývá stejné hodnoty.

$\dot{m} = \rho \dot{V} = \frac{\dot{V}}{v}$

hustota [kg m⁻³] → *objemový tok [m³ s⁻¹]* → *měrný objem [m³ kg⁻¹]*

Mezi dvěma průřezy 1 a 2 lze psát:

$$\dot{m} = \dot{V}_1 \rho_1 = \dot{V}_2 \rho_2 = konst.$$

Objemový průtok lze vyjádřit jako součin průtočné plochy S (kolmé na vektor rychlosti) a velikosti rychlosti w

$$\dot{V} = Sw$$

Rovnici kontinuity lze tedy psát v následujícím tvaru:

$$\dot{m} = \rho_1 S_1 w_1 = \rho_2 S_2 w_2 = \rho S w = konst.$$

Příklad 1

Navrhňte dýzu pro tlakový poměr 0.8. Dýzou budou protékat 4 [kg s⁻¹] vzduchu. Počáteční tlak vzduchu je 3 [MPa] a teplota 300 [°C]. Určete nejmenší průměr dýzy. Vstupní rychlost zanedbejte.

Dáno: $t_1 = 300 \text{ [}^\circ\text{C]}, p_1 = 3 \text{ [MPa]}, \frac{p_2}{p_1} = 0.8 \text{ [-]}$

Určit: $d_{min} = ? \text{ [m]}$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Jestliže máme navrhovat průměr dýzy, musíme využít rovnice kontinuity, protože jen v ní se nachází nepřímo rozměr dýzy:

$$\dot{m} = \rho S w = \rho \frac{\pi d^2}{4} w$$

Odtud lze vyjádřit průměr dýzy:

$$d = \sqrt{\frac{4\dot{m}}{\rho\pi w}}$$

Všimněme si, že jednotky jsou bez indexů. Je to z toho důvodu, že v tomto stádiu řešení příkladu nemůžeme napsat, pro kterou část dýzy budeme počítat průměr, neboť nevíme, zda máme navrhovat konvergentní, divergentní či konvergentně-divergentní dýzu. Nejprve musíme určit kritický tlakový spád:

$$\beta^* = \frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = \left(\frac{2}{1.4 + 1} \right)^{\frac{1.4}{1.4 - 1}} = 0.528 [-]$$

Tlakový spád na dýze daný v zadání příkladu je větší než kritický tlakový spád vypočtený výše ($\beta > \beta^*$). Jde tedy o podkritický tlakový spád, a tudíž navrhujeme konvergentní (zuzující se) dýzu. Nyní již můžeme doplnit indexy do rovnice pro výpočet průměru:

$$d_2 = d_{min} = \sqrt{\frac{4\dot{m}}{\rho_2\pi w_2}}$$

Abychom mohli dopočítat průměr d_2 , potřebujeme znát hustotu na výstupu z dýzy ρ_2 a rychlost na výstupu z dýzy w_2 .



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Rychlost na výstupu z dýzy určíme vztahem odvozeným na začátku cvičení:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} = \sqrt{2 \frac{1.4 * 287.04}{1.4 - 1} (300 + 273.15) * \left(1 - 0.8^{\frac{1.4-1}{1.4}} \right)} \cong 266.7 [m s^{-1}]$$

Hustotu na výstupu z dýzy můžeme vypočítat z rovnice adiabaty:

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa$$

$$\frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_2}{\rho_2^\kappa}$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_1}{r T_1} * \beta^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{3 * 10^6}{287.04 * (300 + 273.15)} * 0.8^{\frac{1}{1.4}} \cong 15.55 [kg m^{-3}]$$

Nejmenší průměr dýzy (tj. výstupní průměr u konvergentní dýzy) je tedy následující:

$$d_2 = \sqrt{\frac{4\dot{m}}{\rho_2 \pi w_2}} = \sqrt{\frac{4 * 4}{15.55 * \pi * 266.7}} \cong 0.035 [m]$$



Příklad 2

Vzduch o tlaku 1,5 [MPa] a teplotě 27 [°C] vytéká Lavalovou dýzou do prostředí o tlaku 0.117 [MPa]. Nejužší průřez dýzy má průměr 0.04 [m]. Za jakou dobu vyteče 250 [kg] vzduchu a jaká bude výtoková rychlost? Vstupní rychlost zanedbejte.

Dáno: $t_1 = 27 [^{\circ}C]$, $p_1 = 1.5 [MPa]$, $p_2 = 0.117 [MPa]$, $r = 287.04 [J kg^{-1}K^{-1}]$, $\kappa = 1.4$

$d_n = 0.04[m]$, $m_v = 250 [kg]$

Určit: $w_2 = ? [m s^{-1}]$, $t = ? [s]$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

V zadání příkladu je uvedeno, že vzduch proudí Lavalovou dýzou, tj. dýzou, která má konvergentně-divergentní tvar. Tato dýza se používá pro urychlení proudu z podzvukové rychlosti do rychlosti nadzvukové. Tlakový spád v dýze by měl tedy být nadkritický – ověřme výpočtem:

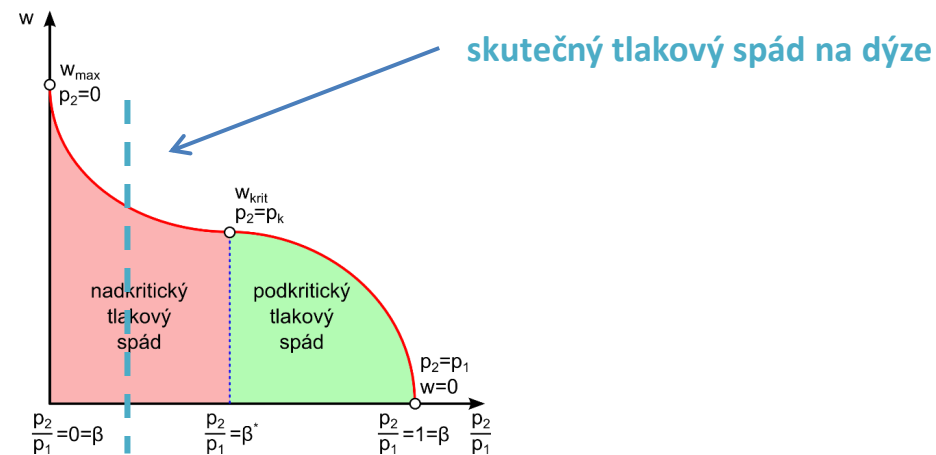
Kritický tlakový spád:

$$\beta^* = \frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \cong 0.528$$

Skutečný tlakový spád na dýze:

$$\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{0.117 * 10^6}{1.5 * 10^6} \cong 0.078$$

Z výpočtu vyplývá, že $\beta < \beta^*$, a tudíž se jedná o nadkritický tlakový spád – viz obrázek níže:



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Z hlediska výpočtu to znamená, že v dýze se v nejužším průřezu dosáhne kritických hodnot, tedy kritické rychlosti (rychlost zvuku) a v tomto průřezu dosáhneme i maximálního průtokového množství vzduchu v celé dýze. Tvar Lavalovy dýzy navíc umožňuje, aby se rychlost proudu zvětšovala, tedy výstupní rychlost očekáváme nadzvukovou.

Výtokovou rychlost si můžeme vypočítat, jelikož již ze zadání známe veškeré potřebné údaje:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)} = \sqrt{2 \frac{1.4 * 287.04}{1.4 - 1} (27 + 273.15) * \left(1 - \left(\frac{0.117 * 10^6}{1.5 * 10^6} \right)^{\frac{1.4 - 1}{1.4}} \right)} \cong 558.7 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$$

Známe-li výtokovou rychlost, můžeme přistoupit k výpočtu doby, za kterou vyteče dané množství vzduchu. Výchozí rovnicí pro výpočet bude rovnice hmotnostního toku:

$$\dot{m} = \frac{m_v}{t} \rightarrow t = \frac{m_v}{\dot{m}} \text{ [s]}$$

Maximální hmotnostní průtok je dán u kritického tlakového spádu průtokem přes nejužší průřez:

$$\dot{m} = \rho_k S_k w_k$$

Z rovnice plyne, že pro výpočet hmotnostního průtoku je potřebné dopočítat hustotu a rychlost v daném průřezu. V obou případech se jedná o kritické parametry. Hodnotu hustoty v kritickém průřezu lze vypočítat z rovnice adiabaty, jelikož jsme si zavedli podmínku (viz minulé cvičení), že se nepřivádí ani neodvádí žádné teplo:

$$p_1 v_1^\kappa = p_k v_k^\kappa \Leftrightarrow \frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_k}{\rho_k^\kappa} \rightarrow \rho_k = \rho_1 \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_1}{r T_1} \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$



Je vidět, že se v rovnici pro výpočet hustoty v kritickém průřezu objevila nová neznámá – hodnota kritického tlaku. Tento tlak lze ovšem vyjádřit z kritického tlakového spádu:

$$\beta^* = \frac{p_k}{p_1} \rightarrow p_k = p_1 \beta^* = 1.5 * 10^6 * 0.528 = 0.792 \text{ [MPa]}$$

Hustota v kritickém průřezu je tedy následující:

$$\rho_k = \frac{p_1}{rT_1} \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{1.5 * 10^6}{287.04 * (27 + 273.15)} 0.528^{\frac{1}{1.4}} \cong 11.033 \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$$

Když se počítá hustota v kritickém průřezu, dosazuje se kritický tlakový spád, nikoliv skutečný!

Pro kritickou rychlost platí následující vztah (viz minulé cvičení):

$$w_k = \sqrt{\frac{2\kappa rT_1}{\kappa + 1}} = \sqrt{\frac{2 * 1.4 * 287.04 * (27 + 273.15)}{1.4 + 1}} \cong 317.04 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$$

Hmotnostní průtok nejužším průřezem dýzy:

$$\dot{m} = \rho_k S_k w_k = \rho_k \frac{\pi d_k^2}{4} w_k = 11.033 * \frac{\pi * 0.04^2}{4} * 317.04 \cong 4.4 \text{ [kg s}^{-1}\text{]}$$

A nyní již můžeme dopočítat čas, za který dýzou proteče 250 [kg] vzduchu:

$$t = \frac{m_v}{\dot{m}} = \frac{250}{4.4} \cong 56.8 \text{ [s]}$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

DĚKUJI ZA POZORNOST



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY