



Termomechanika – cvičení 9

reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Obsah

Dynamika proudících plynů - příklady

Voda a vodní pára

p-v, T-s, h-s diagramy

Orientace v tabulkách a diagramech

Určování termodynamického stavu vody a vodní páry



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Příklad 1

Dusík o tlaku 0.15 [MPa] a teplotě 150 [°C] vytéká z uzavřené nádoby tryskou do prostoru o tlaku 0.1 [MPa]. Vypočítejte, za jakou dobu vyteče 200 [kg] dusíku, jestliže nejužší průměr dýzy je 50 [mm].

Dáno: $t_1 = 150 [^{\circ}C]$, $p_1 = 0.15 [MPa]$, $p_2 = 0.1 [MPa]$, $M_N = 0.014 [kg\ mol^{-1}]$

$$d_n = 0.05 [m], m_v = 200 [kg]$$

Určit:

1. kritický tlakový poměr pro dusík (N₂)
2. stanovte, zda se jedná o rozšiřující se dýzu, či o dýzu zužující se
3. určete výtokovou rychlost z dýzy
4. vypočítejte hustotu v nejužším průřezu dýzy
5. stanovte hmotnostní průtok dýzou a dobu výtoku



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

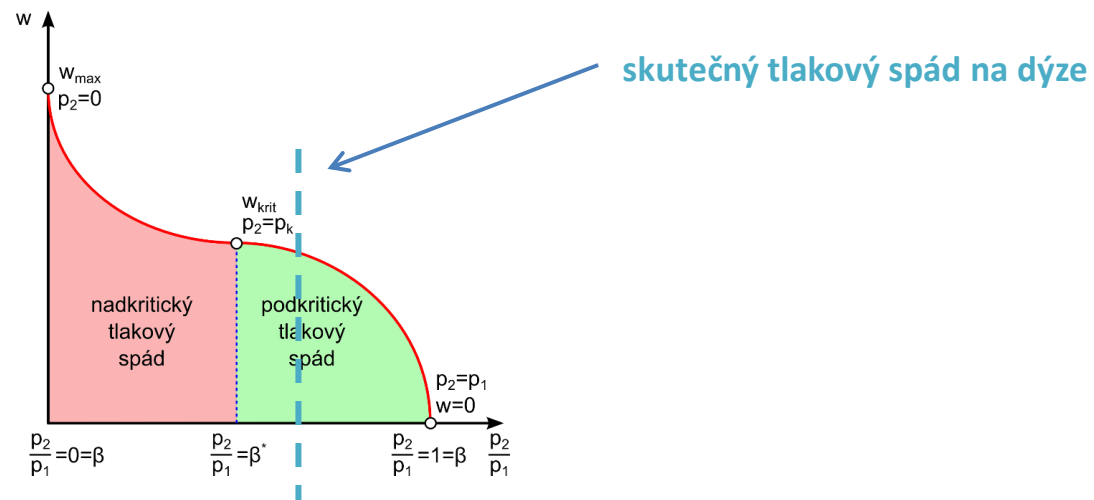
Dusík (N₂) je dvouatomový plyn, a tudíž hodnota Poissonovy konstanty κ je 1.4. Kritický tlakový spád je tedy následující:

$$\beta^* = \frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \cong 0.528$$

Skutečný tlakový spád na dýze:

$$\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{0.1 * 10^6}{0.15 * 10^6} \cong 0.67$$

Z výpočtu vyplývá, že $\beta > \beta^*$, a tudíž se jedná o podkritický tlakový spád (viz obrázek níže) a budeme tedy navrhovat zužující se (konvergentní) dýzu.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Z hlediska výpočtu to znamená, že nejužší průřez dýzy je konci dýzy; dále lze předpokládat, že výstupní rychlost bude podkritická (menší než místní rychlost zvuku).

Před výpočtem výstupní rychlosti je třeba dopočítat individuální (specifickou) plynovou konstantu pro plynný dusík:

$$r = \frac{R}{M} = \frac{8.314}{2 * 0.014} \cong 296.93 [J kg^{-1} K^{-1}]$$

Výtokovou rychlost si můžeme vypočítat, jelikož již ze známe veškeré potřebné údaje:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} = \sqrt{2 \frac{1.4 * 296.93}{1.4 - 1} (150 + 273.15) * \left(1 - \left(\frac{0.1 * 10^6}{0.15 * 10^6} \right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \right)} \cong 310.2 [m s^{-1}]$$

Hodnotu hustoty na výstupu z dýzy lze vypočítat z rovnice adiabaty, jelikož jsme si zavedli podmínku (viz minulé cvičení), že se nepřivádí ani neodvádí žádné teplo:

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa \Leftrightarrow \frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_2}{\rho_2^\kappa} \rightarrow \rho_2 = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_1}{r T_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$
$$\rho_2 = \frac{p_1}{r T_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{0.15 * 10^6}{296.93 * (150 + 273.15)} \left(\frac{0.1}{0.15} \right)^{\frac{1}{1.4}} \cong 0.897 [kg m^{-3}]$$

Hmotnostní průtok lze určit průtokem přes nejužší průřez dýzy:

$$\dot{m} = \rho_2 S_2 w_2$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

$$\dot{m} = \rho_2 S_2 w_2 = \rho_2 \frac{\pi D^2}{4} w_2 = 0.897 * \frac{\pi * 0.05^2}{4} * 310.2 \cong 0.546 [kg s^{-1}]$$

Čas výtoku lze jednoduše dopočítat z rovnice:

$$\dot{m} = \frac{m_v}{t} \rightarrow t = \frac{m_v}{\dot{m}} = \frac{200}{0.546} = 366.3 [s]$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Příklad 2

Určete nejmenší průměr otvoru, kterým vytéká vzduch o hmotnostním průtoku 0.02 [kg.s-1] z nádoby do atmosféry o tlaku 0.1 [MPa] . V nádobě je tlak 0.25 [MPa] a teplota 320 [°C] .

Dáno: $t_1 = 320 \text{ [°C]}, p_1 = 0.25 \text{ [MPa]}, p_2 = 0.1 \text{ [MPa]}, r = 287.04 \text{ [J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}]$

$$\dot{m} = 0.02 \text{ [kg s}^{-1}\text{]}$$

Určit:

1. kritický tlakový poměr pro vzduch (dvouatomový plyn)
2. stanovte, zda se jedná o rozšiřující se dýzu, či o dýzu zužující se
3. určete výtokovou rychlost z dýzy
4. vypočítejte hustotu v nejužším průřezu dýzy



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

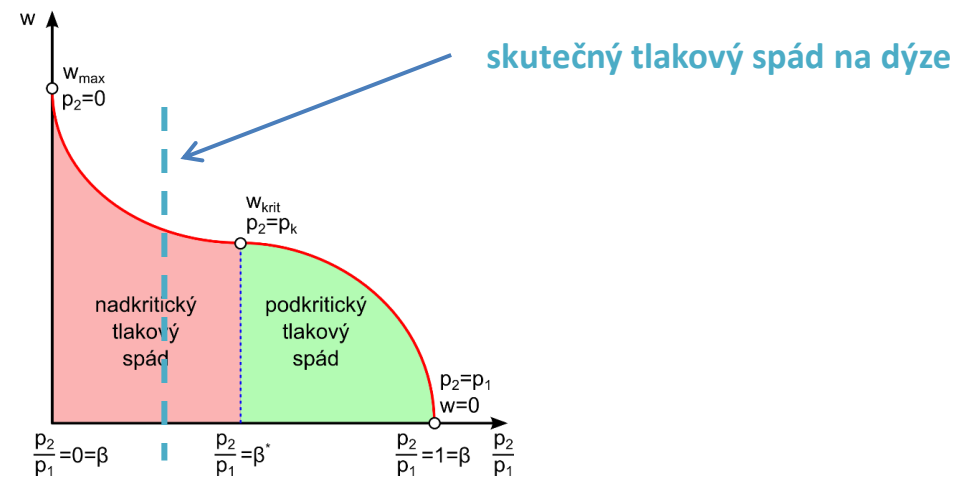
Vzduch je dvouatomový plyn, a tudíž hodnota Poissonovy konstanty κ je 1.4. Kritický tlakový spád je tedy následující:

$$\beta^* = \frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \cong 0.528$$

Skutečný tlakový spád na dýze:

$$\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{0.1 * 10^6}{0.25 * 10^6} = 0.4$$

Z výpočtu vyplývá, že $\beta < \beta^*$, a tudíž se jedná o nadkritický tlakový spád (viz obrázek níže) a budeme tedy navrhovat Lavalovu dýzu.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Z hlediska výpočtu to znamená, že v dýze se v nejužším průřezu dosáhne kritických hodnot, tedy kritické rychlosti (rychlost zvuku) a v tomto průřezu dosáhneme i maximálního průtokového množství vzduchu v celé dýze. Tvar Lavalovy dýzy navíc umožňuje, aby se rychlost proudu zvětšovala, tedy výstupní rychlost očekáváme nadzvukovou.

Výtokovou rychlost si můžeme vypočítat, jelikož známe veškeré potřebné údaje:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa r}{\kappa - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)} = \sqrt{2 \frac{1.4 * 287.04}{1.4 - 1} (320 + 273.15) * \left(1 - \left(\frac{0.1 * 10^6}{0.25 * 10^6} \right)^{\frac{1.4 - 1}{1.4}} \right)} \cong 523.9 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$$

Hodnotu hustoty v nejužším průřezu dýzy lze vypočítat z rovnice adiabaty, jelikož jsme si zavedli podmínku (viz minulé cvičení), že se nepřivádí ani neodvádí žádné teplo:

$$p_1 v_1^\kappa = p_k v_k^\kappa \leftrightarrow \frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_k}{\rho_k^\kappa} \rightarrow \rho_k = \rho_1 \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_1}{r T_1} \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\rho_k = \frac{p_1}{r T_1} \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{0.25 * 10^6}{287.04 * (320 + 273.15)} 0.528^{\frac{1}{1.4}} \cong 0.931 \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$$

Pro kritickou rychlost platí následující vztah (viz minulé cvičení):

$$w_k = \sqrt{\frac{2 \kappa r T_1}{\kappa + 1}} = \sqrt{\frac{2 * 1.4 * 287.04 * (320 + 273.15)}{1.4 + 1}} \cong 445.68 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$$



Jestliže máme určit průměr nejmenšího otvoru dýzy, pak se jedná o průměr kritického průřezu, tj. toho průřezu, kde se dosahuje kritické rychlosti proudění. Budeme tedy vycházet z rovnice kontinuity pro kritický průřez:

$$\dot{m} = \rho_k S_k w_k = \rho_k \frac{\pi d_k^2}{4} w_k \rightarrow d_k = \sqrt{\frac{4\dot{m}}{\pi \rho_k w_k}} = \sqrt{\frac{4 * 0.02}{\pi * 0.931 * 445.68}} \cong 7.834 [mm]$$



VODA A VODNÍ PÁRA



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

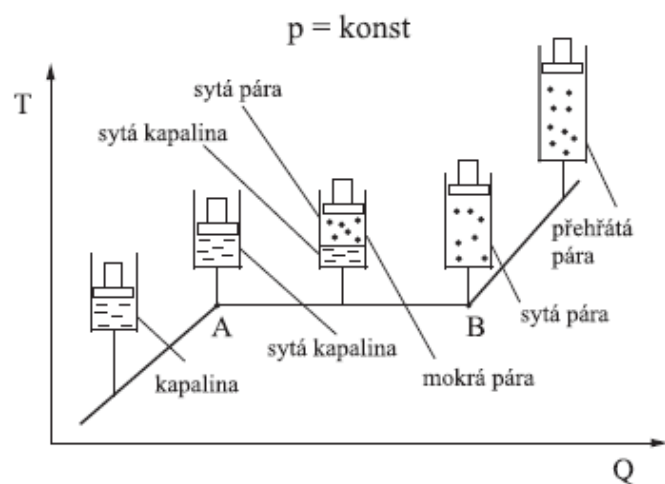


Dosud jsme se zabývali ideálním plynem:

- Nevazký, dokonale stlačitelný, nemůže přejít do kapalného stavu, jeho měrné tepelné kapacity c_p , c_v nejsou funkcí teploty, řídí se rovnicí stavu ideálního plynu $pv = rT$
- Isotermy ideálního plynu v p - v diagramu tvoří soustavu rovnoosých hyperbol

Reálné jednosložkové tekutiny mají v p - v diagramu isotermy odlišné

- Při teplotách nižších než kritická teplota jsou vodorovnými úsečkami v oblasti, kde dochází k vypařování, tj. během vypařování kapalná fáze při konstantním tlaku se teplota nemění
- Koncové body těchto úseček (A,B) leží na tzv. mezních křivkách



Sytá kapalina

kapalina v takovém stavu, že dalším přívodem tepla se začne měnit v sytou páru (bod A); přívodem tepla syté kapalině se tedy její teplota nezvyšuje

Sytá pára

pára vzniklá po odpaření poslední kapičky syté kapaliny (bod B); dalším přívodem tepla by se začala zvyšovat teplota páry, tj. hovořili bychom o přehřáté páře

Mokrá pára

směs syté kapaliny a syté páry (mezi body A a B)

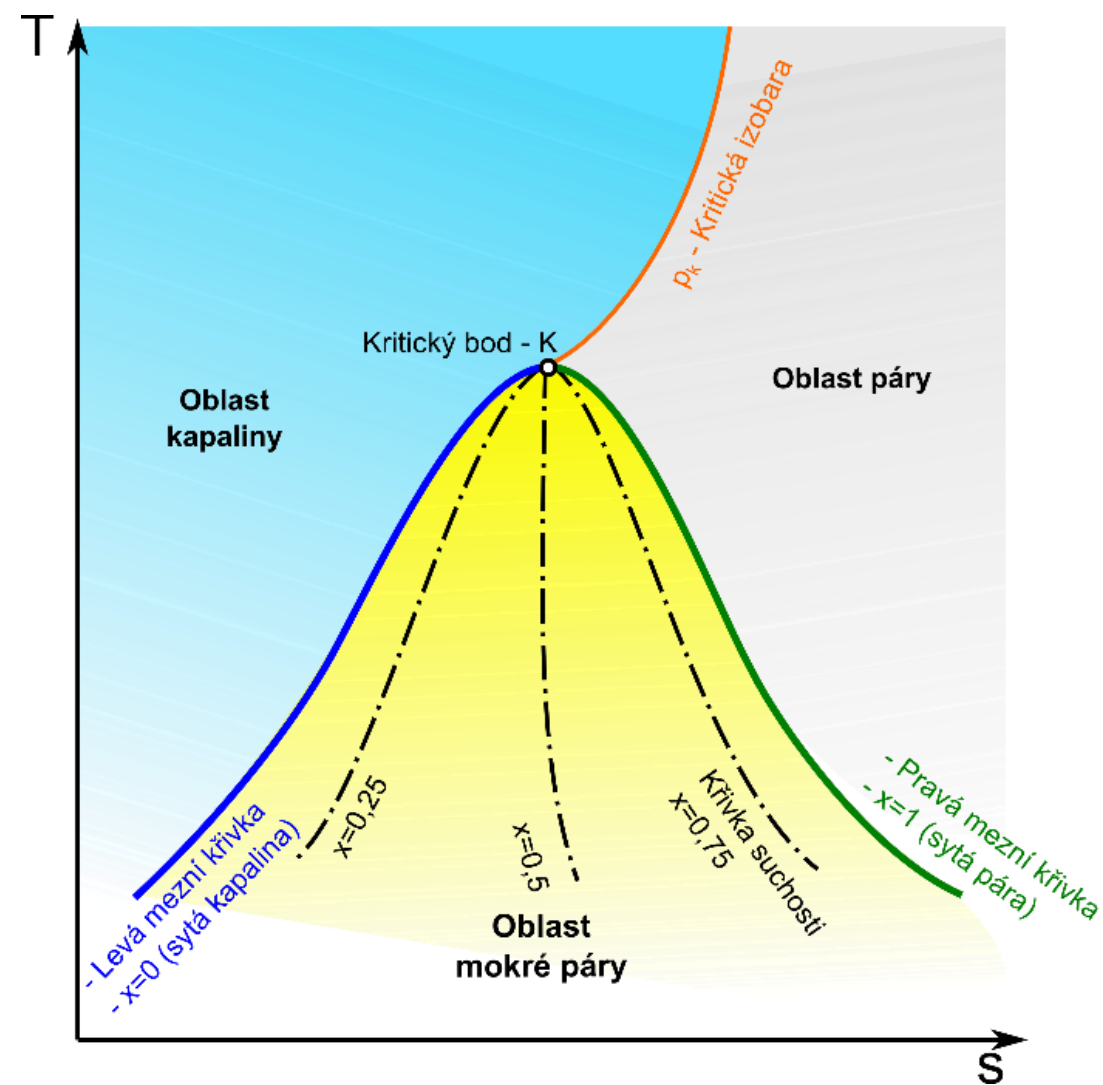
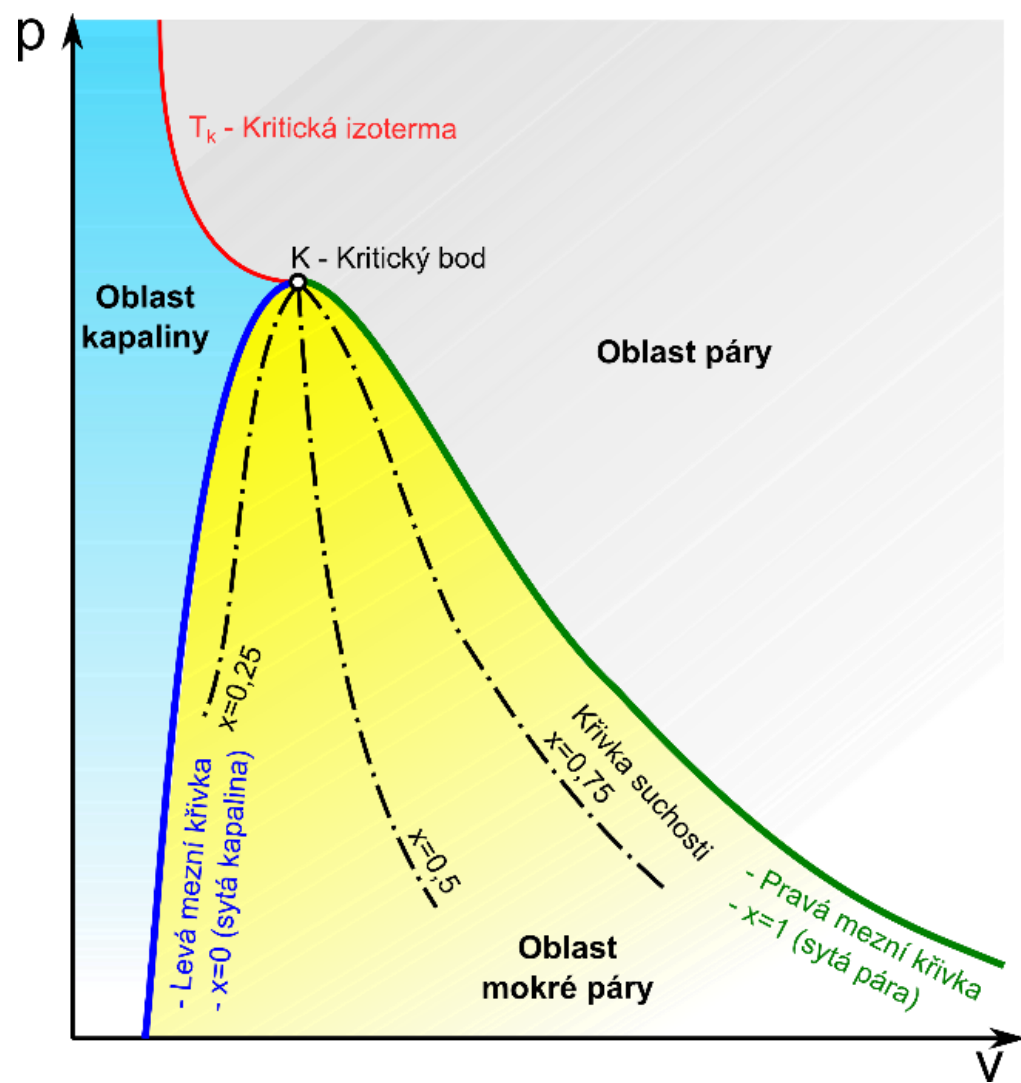
Přehřátá pára

vzniká dalším přívodem tepla syté páře, tj. přívodem tepla se zvyšuje teplota přehřáté páry

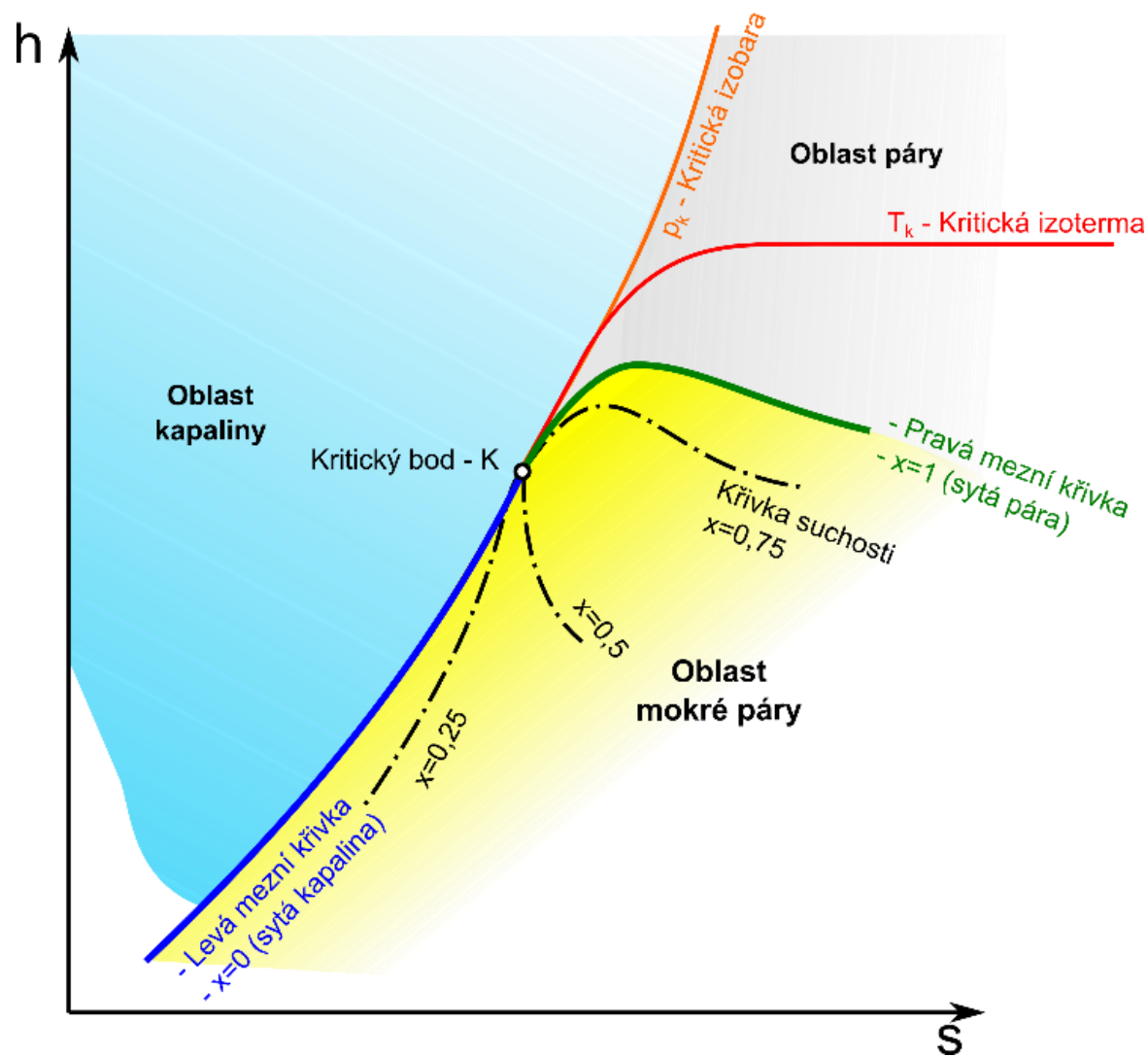


EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



- Levá mezní křivka „křivka syté kapaliny“
- Pravá mezní křivka „křivka syté páry“
- Kritický bod bod, v němž se sbíhají obě mezní křivky

$$T_{k H_2O} = 374.15 [^{\circ}C] = 647.3[K]$$

$$p_{k H_2O} = 22.13 [MPa]$$

charakteristické pro každou látku (zde uvedeno pro vodu)

- Křivky suchosti reprezentují

čerchované čáry v diagramu;

hodnoty suchosti v oblasti mokré páry



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Mokrý pára

Stav vodní páry včetně kapalné fáze je nejčastěji určen teplotou T a tlakem p . V oblasti mokré páry ale isotermy splývají s isobarami, tj. nemají jediný průsečík, a proto je potřeba další parametr pro jednoznačné určení stavu mokré páry – suchost x .

- Suchost je definována pomocí hmotnosti syté páry m'' a syté kapaliny m'
- Suchost mokré páry je bezrozměrnou veličinou a pohybuje se v intervalu $< 0; 1 >$

$$x = \frac{m''}{m} = \frac{m''}{m' + m''}$$

hmotnost mokré páry ($m = m' + m''$)

Horním indexem ' značíme veličiny pro sytou kapalinu
Horním indexem '' značíme veličiny pro sytou páru
Veličiny pro mokrou páru značíme bez indexu

Příklady:

v'' ... měrný objem syté páry
 p' ... tlak syté kapaliny
 h ... entalpie mokré páry



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

- Když $\frac{m''}{m} = 0 \rightarrow$ v daném uvažovaném objemu se nenachází voda ve formě páry. Suchost je tedy rovna nule a tomuto stavu odpovídá stav syté kapaliny. Stavové veličiny syté kapaliny (tlak, teplota, měrný objem, měrná entalpie, měrná entropie) se odečítají z tabulek v části „Vlastnosti na mezi sytosti“ a to buď dle teploty, či tlaku. Odečítáme z tabulek hodnoty s horním indexem '.
- Když $\frac{m''}{m} = 1 \rightarrow$ v daném uvažovaném objemu se nenachází voda. Suchost je rovna jedné a tomuto stavu odpovídá stav syté páry. Stavové veličiny syté páry (tlak, teplota, měrný objem, měrná entalpie, měrná entropie) se odečítají z tabulek v části „Vlastnosti na mezi sytosti“ a to buď dle teploty, či tlaku. Odečítáme z tabulek hodnoty s horním indexem ''.



Jestliže stavové veličiny pro sytou kapalinu a sytou páru (tj. pro hodnoty suchosti 0 a 1) najdeme v tabulkách, kde najdeme hodnoty pro mokrou páru?

Stavové veličiny pro mokrou páru (tj. syté kapaliny a syté páry) se počítají ze znalosti stavových veličin na mezních křivkách

Platí zákon zachování hmotnosti:

$$m = m' + m''$$

Pára i kapalina zabírají jiný objem a tedy lze psát:

$$V = V' + V''$$

$$m v = m' v' + m'' v''$$

$$v = \frac{m'}{m} v' + \frac{m''}{m} v''$$

$$v = \frac{m - m''}{m} v' + \frac{m''}{m} v''$$

$$v = \left(1 - \frac{m''}{m}\right) v' + \frac{m''}{m} v''$$

$$v = (1 - x) v' + x v''$$

$$v = v' + x(v'' - v')$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Analogicky by se daly odvodit vztahy pro výpočet měrné entalpie a měrné entropie. Výsledné vztahy jsou tedy následující:

$$v = v' + x(v'' - v')$$

měrný objem mokré páry [$m^3 kg^{-1}$]

měrný objem syté kapaliny [$m^3 kg^{-1}$]

měrný objem syté páry [$m^3 kg^{-1}$]

suchost mokré páry [—]

$$h = h' + x(h'' - h')$$

měrná entalpie mokré páry [$J kg^{-1}$]

měrná entalpie syté kapaliny [$J kg^{-1}$]

měrná entalpie syté páry [$J kg^{-1}$]

suchost mokré páry [—]

$$s = s' + x(s'' - s')$$

měrná entropie mokré páry [$J K^{-1} kg^{-1}$]

měrná entropie syté kapaliny [$J K^{-1} kg^{-1}$]

měrná entalpie syté páry [$J kg^{-1}$]

suchost mokré páry [—]



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Příklad 1

Vypočítejte měrný objem, měrnou entalpii, měrnou entropii a vnitřní energii mokré páry, při teplotě $62\text{ [}^{\circ}\text{C]}$ a suchosti 0.3 [-] .

Dáno: $t = 62\text{ [}^{\circ}\text{C]}$, $x = 0.3\text{ [-]}$

Určit: $v = ?\text{ [m}^3\text{kg}^{-1}\text{]}$, $h = ?\text{ [J kg}^{-1}\text{]}$, $s = ?\text{ [J K}^{-1}\text{ kg}^{-1}\text{]}$, $u = ?\text{ [J kg}^{-1}\text{]}$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Ze zadání je evidentní, že se jedná o mokrou páru, tedy stav, který hledáme, je mezi pravou a levou mezní křivkou. Jelikož známe ze zadání teplotu, pro další výpočet veličin potřebujeme vyhledat z tabulek vlastnosti na mezi sytosti podle teploty. Pro teplotu 62 [°C] platí:

$$p = 0.02187 \text{ [MPa]}$$

$$v' = 0.0010182 \text{ [m}^3\text{kg}^{-1}\text{]}$$

$$v'' = 7.034 \text{ [m}^3\text{kg}^{-1}\text{]}$$

$$h' = 259.52 \text{ [kJ kg}^{-1}\text{]}$$

$$h'' = 2612.3 \text{ [kJ kg}^{-1}\text{]}$$

$$s' = 0.8563 \text{ [kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$$

$$s'' = 7.8764 \text{ [kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}\text{]}$$

Výpočet veličin pro mokrou páru je tedy následující:

$$v = v' + x(v'' - v') = 0.0010182 + 0.3 * (7.034 - 0.0010182) = 2.11 \text{ [m}^3\text{kg}^{-1}\text{]}$$

$$h = h' + x(h'' - h') = 259.52 + 0.3 * (2612.3 - 259.52) = 965.354 \text{ [kJ kg}^{-1}\text{]}$$

$$s = s' + x(s'' - s') = 0.8563 + 0.3(7.8764 - 0.8563) = 2.96233 \text{ [kJ K}^{-1}\text{ kg}^{-1}\text{]}$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

Jelikož známe hodnotu entalpie, tlaku i měrného objemu pro danou suchost, můžeme dopočítat i velikost vnitřní energie. Vycházíme z výpočtu entalpie:

$$h = u + pv \rightarrow u = h - pv$$

$$u = h - pv = 965.354 * 10^3 - 0.02187 * 10^6 * 2.11 = 919.208 \text{ [kJ kg}^{-1}\text{]}$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

DĚKUJI ZA POZORNOST



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

