

Electrostatics and stationary current fields

Modeling of multiphysics problems

Department of electrical engineering and computer modeling
Faculty of electrical engineering
University of West Bohemia in Pilsen

31. května 2021

1 Maxwellovy rovnice

2 Elektrostatické pole

- Základní vztahy
- Skalární potenciál
- Rozhraní dvou dielektrik
- Parciální diferenciální rovnice
- Energie ve stacionárním elektrickém poli
- Síly v elektrostatickém poli

3 Elektrické proudové pole

- Základní vztahy
- Rozhraní dvou vodičů
- Parciální diferenciální rovnice
- Energie a výkon ve stacionárním proudovém poli

Maxwellovy rovnice

James Clerk Maxwell

- Jeho práce v oblasti elektromagnetismu založena na Faradayových experimentech.
- Postuloval základní vztahy elektřiny a magnetismu (20 rovnic).
- Z rovnic předpověděl existenci elektromagnetického vlnění.
- Demonstroval jednotnou povahu elektromagnetismu a světla (elektromagnetické vlnění).
- V roce 1864 předpověděl z elektromagnetických experimentů konečnou rychlost šíření světla.
- Publikoval první barevnou fotografii jako důkaz aditivního míchání barev.



První barevná fotografie



skotský matematik a
fyzik
(1831 – 1879)



the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

- Zákon celkového proudu – Ampérův zákon

$$\oint_c \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

- Faradayův indukční zákon

$$\oint_c \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Gaussův zákon elektrostatiky

$$\oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = Q$$

- Zákon kontinuity indukčního toku

$$\oint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0$$

- Zákon celkového proudu – Ampérův zákon (posuvné proudy jsou nulové)

$$\oint_c \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I$$

- Faradayův indukční zákon (indukované napětí je nulové)

$$\oint_c \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0$$

- Gaussův zákon elektrostatiky

$$\oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = Q$$

- Zákon kontinuity indukčního toku

$$\oint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0$$

- Zákon celkového proudu – Ampérův zákon

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Faradayův indukční zákon

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Gaussův zákon elektrostatiky

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

- Zákon kontinuity indukčního toku

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropská strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

- Zákon celkového proudu – Ampérův zákon (posuvné proudy jsou nulové)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

- Faradayův indukční zákon (indukované napětí je nulové)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

- Gaussův zákon elektrostatiky

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

- Zákon kontinuity indukčního toku

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

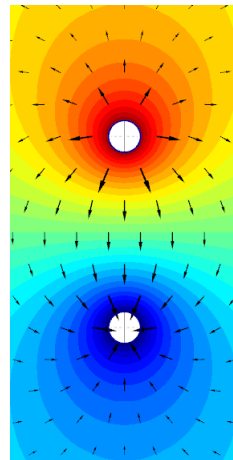


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Elektrostatické pole

- Zdrojem elektrického pole jsou náboje.
- Elektrický náboj je skalární veličina a může nabývat kladné nebo záporné hodnoty.
- Kvantový charakter (jeho velikost je rovna celistvému násobku elementárního náboje $e^- = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$).
- Objemová hustota náboje $\rho = \frac{dQ}{dV}$.
- Povrchová hustota náboje $\sigma = \frac{dQ}{dS}$.
- Lineární hustota náboje $\tau = \frac{dQ}{dl}$.
- Volné náboje (elektrony v kovech, ionty v elektrolytech).
- Vázané náboje (polarizace dielektrika).



- Faradayův indukční zákon (indukované napětí je nulové)

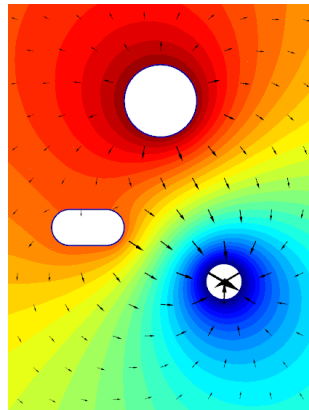
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

elektrostatické pole je nevírové

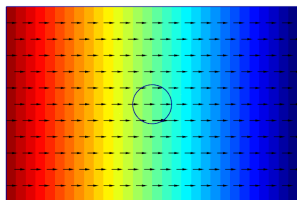
- Gaussův zákon elektrostatiky

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

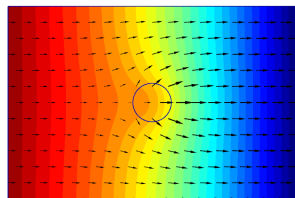
elektrostatické pole je zřídlové – zdrojem pole jsou elektrické náboje (kladné nebo záporné)



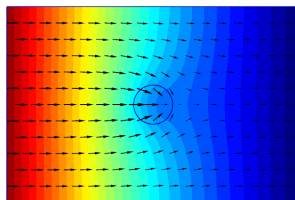
Zřídlové pole



Bez zdroje ($Q = 0 \text{ C}$)



Zřídlo ($Q > 0 \text{ C}$)



Propad ($Q < 0 \text{ C}$)

- Intenzita elektrického pole je definována jako síla působící na jednotkový náboj

$$\mathbf{F}_{L,e} = Q\mathbf{E}$$

- Elektrická indukce

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

- Elektrické napětí

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Skalární potenciál ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$ a zároveň platí $\text{rot grad } \varphi = 0$)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$$

(znaménko mínus respektuje fyzikální představu o směru intenzity elektrického pole ve směru zmenšujícího se potenciálu)

Vlastnosti skalárního potenciálu:

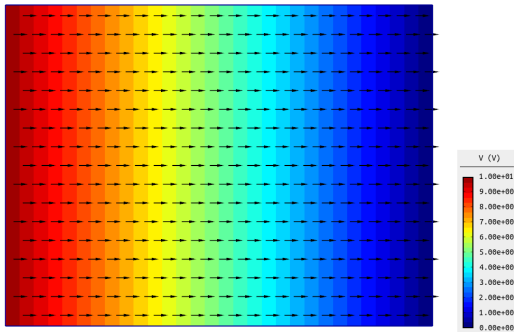
- Vhodný pro nepřímé řešení (okrajové úlohy pro potenciál)
- Nejednoznačný – může se lišit o konstantu

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\text{grad } (\varphi + K)$$

- Spojitost elektrického potenciálu – potenciál φ je ve všech bodech spojitou funkcí polohy.
- Fyzikální interpretace: napětí je rovno práci vykonané přenesením jednotkového náboje mezi těmito body.

$$A = Q(\varphi_A - \varphi_B) = QU_{AB}$$

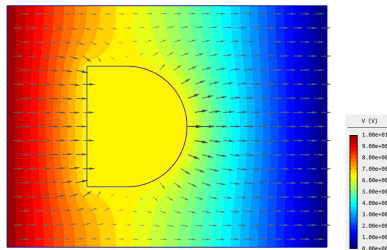
Uvažujme pole v deskovém kondenzátoru. V každém bodě má hodnotu $E = \frac{U}{d}$ a je tedy homogenní.



Elektrické pole deskové kondenzátoru ($E = \text{konst.}$)
homogenní pole

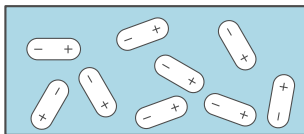
Přivedeme-li na vodič volný elektrický náboj, rozloží se na jeho povrchu s povrchovou hustotou σ . Vnitřní část vodiče je bez makroskopického náboje.

Vložíme-li vodič do vnějšího pole, vzniknou na jeho protilehlých hranách povrchové náboje $\pm \sigma$. Pole uvnitř vodiče je plně vykompenzované (plovoucí elektroda $\varphi = \text{konst.}$).

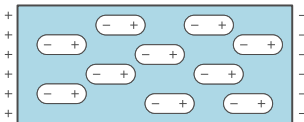


Vodič v elektrickém poli – elektrostatická indukce ($E_v = 0$)

- Dielektrika nevedou vodivý proud – neobsahují volné náboje
- Jednoduchý model dielektrika sestává z elementárních dipólů, které jsou náhodně uspořádány.



- Po přiložení vnějšího elektrického pole se dipóly zorientují ve směru intenzity elektrického pole.



- Zrušíme-li vnější elektrické pole, dipóly se vrátí do původního náhodného uspořádání. Existují však materiály, kterým říkáme *elektrety*, které zůstanou polarizovány (obdobu permanentních magnetů).

- Elektrickou indukci definujeme

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

kde veličina $\mathbf{P}$ představuje polarizaci dielektrika. Z uvedené rovnice lze zapsat vektor polarizace ve tvaru

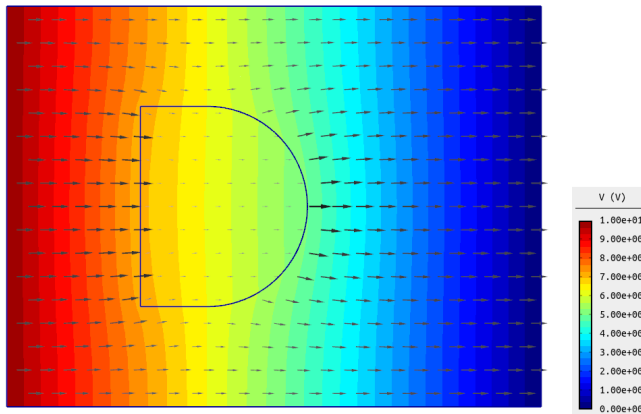
$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Veličinu $\kappa_e = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)$ nazýváme elektrickou susceptibilitou a představuje alternativní popis materiálových vlastností dielektrika.

- Polarizaci lze fyzikálně interpretovat jako elektrickou indukci působící proti účinkům pole, které ho vyvolalo. Výsledné pole je tedy působením dielektrika zeslabeno.
- Ve vzduchu a kovech k polarizaci nedochází ($\varepsilon_r = 1 \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{0}$).



the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)



Dielektrikum v elektrickém poli ($E_d \neq 0$)
elektrostatická polarizace

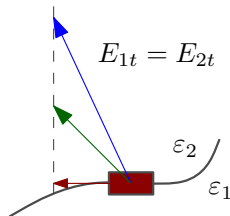
Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru platí jen v regulárních bodech prostředí. Regulárními body nejsou například body, které oddělují jedno prostředí od druhého a kde dochází ke skokové změně permitivity ε . Stavové vektory elektrické intenzity $\mathbf{E}$ a indukce $\mathbf{D}$ se mění nespojitě.

■ Podmínka pro $\mathbf{E}$

$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

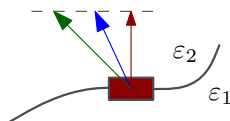
■ Podmínka pro $\mathbf{D}$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$



Intenzita elektrického pole

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$



Elektrická indukce

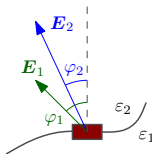
Pro elektrické siločáry platí zákon lomu. Vyjdeme z podmínek na rozhraní (plošnou hustotu náboje σ zanedbáme).

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}$$

Po jednoduché úpravě dostaneme

$$E_1 \sin \varphi_1 = E_2 \sin \varphi_2, \quad \varepsilon_1 E_1 \cos \varphi_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \varphi_2$$

Uhly φ_1 a φ_2 jsou úhly svírající vektory intenzity pole s normálou.



Po další úpravě získáme

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2}$$

Vyjdeme z Gaussovy věty v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho$$

a vztahu zavádějící skalární elektrický potenciál

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Dosazením vztahu pro potenciál do Gaussovy věty získáme parciální diferenciální rovnici ve tvaru

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = -\rho.$$

V lineárním případě lze ε vytknout před operátor divergence a dostaneme rovnici ve tvaru

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Z vektorové identity dále plyne

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi.$$

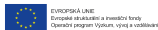
Odvozenou rovnici

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

nazýváme Poissonovou rovnicí (obsahuje nenulovou pravou stranu). V prostředí bez volného náboje ($\rho = 0$) pak rovnice přejde na Laplaceovu rovnici ve tvaru

$$\Delta\varphi = 0.$$

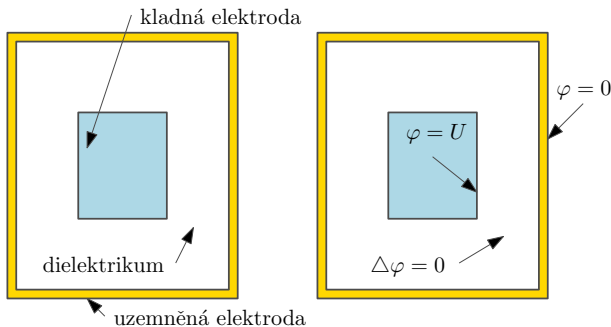
Skalární potenciál popisující elektrostatické pole v lineárním prostředí musí splňovat Laplaceovu nebo Poissonovu rovnici.



the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

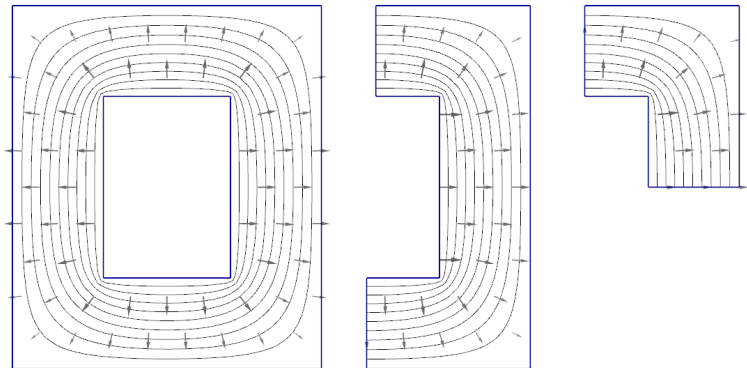
Jednoznačnost řešení je potřeba zajistit vhodnými okrajovými podmínkami.

- Dirichletova okrajová podmínka – znalosti potenciálu φ na hranici oblasti.
- Neumannova okrajová podmínka – znalosti normálové derivace potenciálu $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ na hranici oblasti.



Kondenzátor ve 2D

- Dirichletova okrajová podmínka – znalosti potenciálu φ na hranici oblasti.
- Neumannova okrajová podmínka – znalosti normálové derivace potenciálu $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ na hranici oblasti.



Kondenzátor ve 2D – ekvipotenciály a vektory pole

Kondenzátor je akumulačním prvkem. Nedochází tedy k disipaci energie, ale k jejímu uskladnění. Energie může být v ideálním kapacitoru uskladněna libovolnou dobu.

Mějme soustavu n vodičů s náboji $Q_1, \dots, Q_n$ s potenciály $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ v prostředí s konstantní permitivitou ε .



Energie soustavy je

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_1^n \varphi_i Q_i.$$

V případě deskového kondenzátoru lze napsat

$$W_e = \frac{1}{2}(\varphi_A(+Q) + \varphi_B(-Q)) = \frac{1}{2}Q(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Z uvedeného vztahu plyne energetická definice kapacity

$$C = \frac{2W_e}{U^2}$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

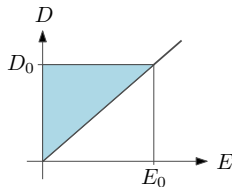
the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Energii elektrického pole lze také vyjádřit přímo pomocí vektorů pole $\mathbf{E}$ a $\mathbf{D}$. Hustotu energie lze zapsat ve tvaru

$$w_e = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} d\mathbf{D}.$$

V případě lineárního izotropního prostředí (LIH) je permitivita konstantní

$$w_e = \int_0^{\mathbf{D}} \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} d\mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{D}^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}.$$



 the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Celková energie soustavy je pak

$$W_e = \int_V w_e dV$$

Elektrostatické pole

Energie ve stacionárním elektrickém poli

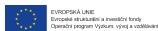
V deskovém kondenzátoru je hustota energie konstantní.



Intenzita elektrického pole



Hustota energie



the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/00132329)

Lorentzova síla na náboj v elektrickém poli

$$\mathbf{F}_{L,e} = q\mathbf{E}$$

Síla odvozená z energie elektrického pole

$$\mathbf{F}_e = \frac{dW_e}{ds} \Rightarrow \mathbf{F}_e = \text{grad } W_e$$

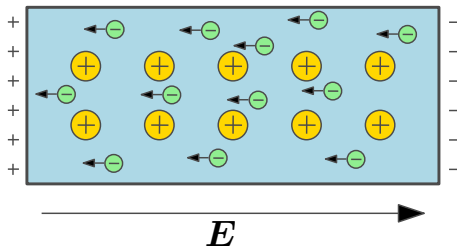


the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Elektrické proudové pole

Elektrické proudové pole

V elektrostatice (elektrické pole buzené nepohybujícími se náboji) neexistuje trvalý proud. Zdroje napětí mají tu vlastnost, že na jejich svorkách je trvalý nadbytek volných nosičů náboje. Tím můžeme ve vodiči trvale udržovat jejich tok. Jestliže se tyto náboje pohybují, hovoříme o stacionárním elektrickém proudovém poli.



Vnější elektrické pole působící na elektrony ve vodiči ($F_{L,e} = QE$)

■ Druhá Maxwellova rovnice

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

elektrické proudové pole je nevírové.

■ Zákon kontinuity

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

elektrické proudové pole nezhřídlové.

■ Skalární potenciál ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ a zároveň platí $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$)

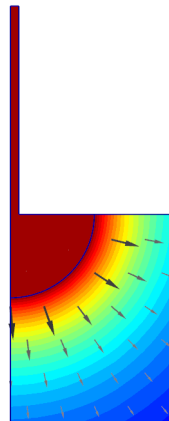
$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

■ Proudová hustota

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}.$$

■ Elektrické napětí

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \, dl = \varphi_A - \varphi_B.$$



Zemní elektroda

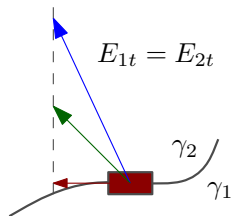
Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru platí jen v regulárních bodech prostředí. Regulárními body nejsou například body, které oddělují jedno prostředí od druhého a kde dochází ke skokové změně vodivosti γ . Stavové vektory elektrické intenzity $\mathbf{E}$ a proudové hustoty $\mathbf{J}$ se mění nespojitě.

■ Podmínka pro $\mathbf{E}$

$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

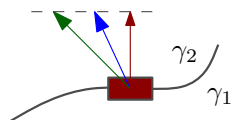
■ Podmínka pro $\mathbf{J}$

$$J_{1n} - J_{2n} = 0$$



Intenzita elektrického pole

$$J_{1n} - J_{2n} = 0$$



Proudová hustota

Vyjdeme z rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \gamma \mathbf{E} = 0$$

a vztahu zavádějící skalární elektrický potenciál

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Kombinací obou vztahů dostaneme parciální diferenciální rovnici ve tvaru

$$\operatorname{div} \gamma \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

V lineárním případě lze γ vytknout před operátor divergence a dostame rovnici ve tvaru

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

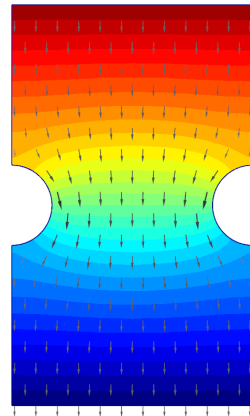
Skalární potenciál popisující stacionární proudové pole v lineárním prostředí musí splňovat Laplaceovu rovnici

$$\Delta \varphi = 0.$$

Elektrické proudové pole

Energie a výkon ve stacionárním proudovém poli

- Průchodem elektrického proudu vodičem o konečné vodivosti γ dochází k disipaci elektrické energie.
- Jde o nevratný proces, při kterém se přeměňuje elektrická energie v tepelnou (Jouleovo teplo).
- Vodič se průchodem proudu ohřívá a teplo se převádí konvekcí a radiací do okolí.
- Fyzikálně lze tento jev vysvětlit srážkami volných nosičů náboje s pevnou mřížkou.



Potenciál

Práce úměrná přenesení náboje z bodu A do B je

$$A = W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \, d\mathbf{l} = Q \int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = QU.$$

Tato práce se změní na teplo s výkonem

$$P = \frac{dW_{AB}}{dt} = U \frac{dQ}{dt} = UI.$$

Při použití Ohmova zákona lze vztah dále převést

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Odvozenou rovnici nazýváme integrálním tvarem Jouleova zákona.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Elektrické proudové pole

Energie a výkon ve stacionárním proudovém poli

Někdy je ovšem výhodnější pracovat s rozložením ztrát v objemu, a proto zavádíme diferenciální tvar Jouleova zákona: měrný Jouleův zákon. Vyjdeme ze vztahů

$$dQ = I dt = \mathbf{J} d\mathbf{S} dt, \quad dU = \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Přírutek energie je pak

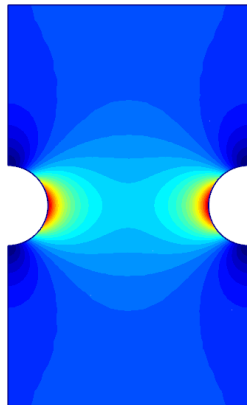
$$dW = dQ dU = \mathbf{J} \mathbf{E} d\mathbf{S} d\mathbf{l} dt = \mathbf{J} \mathbf{E} dV dt.$$

Měrný výkon je tedy roven

$$p = \frac{dW}{dV dt} = \mathbf{J} \mathbf{E} = \frac{J^2}{\gamma} = \gamma \mathbf{E}^2.$$

Ve vodiči jsou pak celkové ztráty

$$P = \int_V p dV.$$

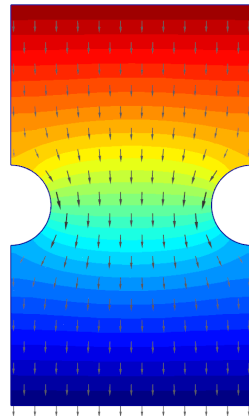


Měrné ztráty

Elektrické proudové pole

Energie a výkon ve stacionárním proudovém poli

- Průchodem elektrického proudu vodičem o konečné vodivosti γ dochází k disipaci elektrické energie.
- Jde o nevratný proces, při kterém se přeměňuje elektrická energie v tepelnou (Jouleovo teplo).
- Vodič se průchodem proudu ohřívá a teplo se převádí konvekcí a radiací do okolí.
- Fyzikálně lze tento jev vysvětlit srážkami volných nosičů náboje s pevnou mřížkou.



Potenciál

Práce úměrná přenesení náboje z bodu A do B je

$$A = W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{l} = Q \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = QU.$$

Tato práce se změní na teplo s výkonem

$$P = \frac{dW_{AB}}{dt} = U \frac{dQ}{dt} = UI.$$

Při použití Ohmova zákona lze vztah dále převést

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Odvozenou rovnici nazýváme integrálním tvarem Jouleova zákona.

Elektrické proudové pole

Energie a výkon ve stacionárním proudovém poli

Někdy je ovšem výhodnější pracovat s rozložením ztrát v objemu, a proto zavádíme diferenciální tvar Jouleova zákona: měrný Jouleův zákon. Vyjdeme ze vztahů

$$dQ = I dt = \mathbf{J} d\mathbf{S} dt, \quad dU = \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Přírutek energie je pak

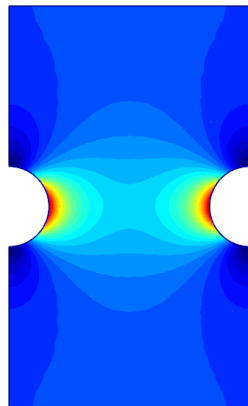
$$dW = dQ dU = \mathbf{J} \mathbf{E} d\mathbf{S} d\mathbf{l} dt = \mathbf{J} \mathbf{E} dV dt.$$

Měrný výkon je tedy roven

$$p = \frac{dW}{dV dt} = \mathbf{J} \mathbf{E} = \frac{J^2}{\gamma} = \gamma \mathbf{E}^2.$$

Ve vodiči jsou pak celkové ztráty

$$P = \int_V p dV.$$



Měrné ztráty

Děkuji za pozornost

Department of electrical engineering and computer modeling
Faculty of electrical engineering
University of West Bohemia in Pilsen