

Teplotní pole

Modelování multifyzikálních problémů

Katedra elektrotechniky a počítačového modelování
Elektrotechnická fakulta
Západočeská univerzita v Plzni

25. května 2021

1 Teplotní pole

- Teplota
- Trojný bod
- Teplo
- Přenos tepla vedením
- Přenos tepla konvekci
- Přenos tepla radiací
- Parciální diferenciální rovnice

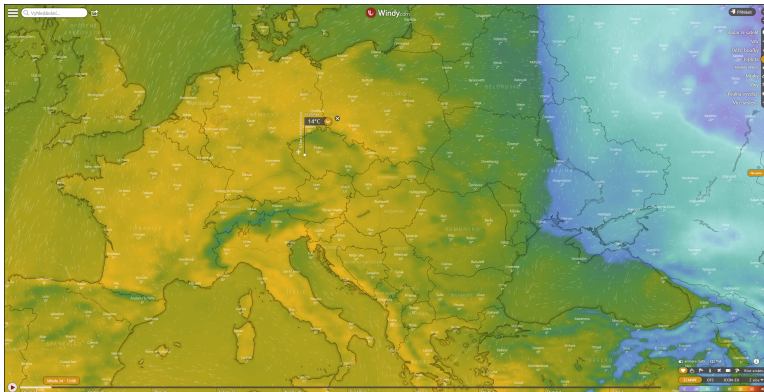
2 Indukční ohřev

Teplotní pole

Teplotní pole

Teplota

Teplota je jednou ze základních fyzikálních veličin, pomocí které lze přesně kvantifikovat pocity jako „studený“ nebo „horký“. Nízká teplota charakterizuje studené předměty zatímco vysoká horké. Jde o makroskopické projevy mikroskopického pohybu.



S teplotní mapou se setkáváme běžně.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

- Skalární veličina, která souvisí s kinetickou energií částic látky.

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m v_i^2,$$

kde v_i je rychlost jednotlivých částic odpovídající jejich mikroskopickému pohybu. Těleso jako celek zůstává v klidu.

- Latinské slovo „temperatura“ lze přeložit jako „příjemný pocit“.
- Existují různé teploměrné stupnice - nejběžnější jsou Celsiova a Kelvinova, další například Fahrenheitova či Réaumurova

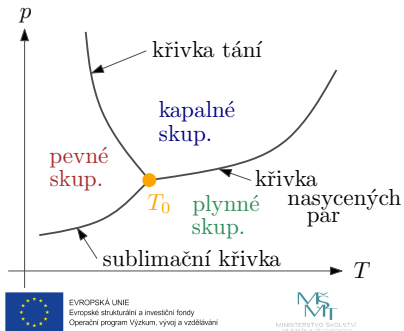
$$K = C + 273.15, \quad F = \frac{9C}{5} + 32, \quad R = \frac{4}{5} C.$$

- $1^\circ\text{C} = 1\text{ K}$ (bod tání vody 0°C , bod varu vody 100°C).
- Absolutní nula je definována jako teplota 0 K , což odpovídá teplotě $-273,15^\circ\text{C}$.



Fázový diagram slouží k zobrazení závislosti stavových veličin termodynamické soustavy (teplota a tlak).

- **Křivka tání** – přechodem přes křivku dochází k tání pevné fáze nebo naopak tuhnutí kapalné fáze.
- **Sublimační křivka** – přechodem přes křivku dochází k sublimaci pevné fáze nebo naopak desublimaci plynné fáze.
- **Křivka nasycených par** – přechodem přes křivku dochází k vypařování kapaliny nebo naopak kondenzaci plynů.



- Na křivkách dochází ke změně fáze. Dodaná energie se spotřebuje na změnu skupenství a nezvyšuje teplotu tělesa.
- Trojný bod určuje stav, při kterém mohou existovat všechna skupenství současně. Teplota trojného bodu je základní teplota pro realizaci termodynamické teplotní stupnice.
- 1 Kelvin je 1/273,16 díl absolutní teploty trojného bodu vody.



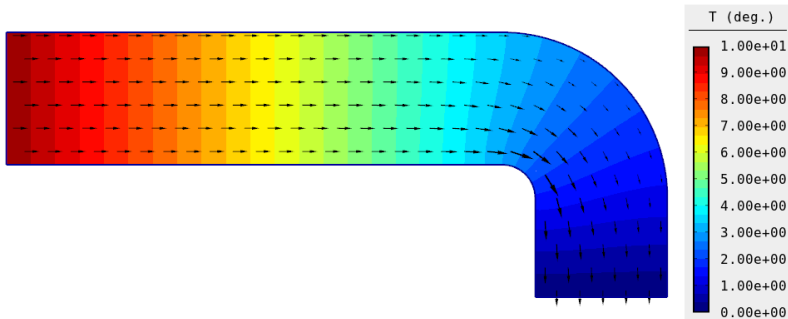
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

- Přenosem tepla rozumíme transport energie z důsledku existence teplotního gradientu. Pokud tedy existuje v libovolném prostředí rozdíl teplot, musí docházet k přenosu tepla.
- Tepelná energie v systému bez vnějších zdrojů volně proudí od míst s vyšší teplotou do míst s nízkou teplotou.



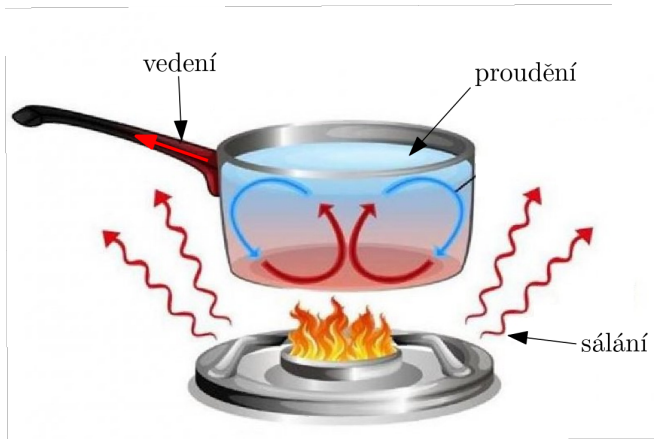
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Formy přenosu tepla



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

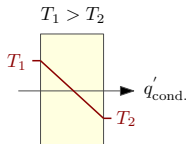


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Přenos tepla vedením je způsoben přímým kontaktem částic v látce. Přenos energie je zprostředkován přímým tlakem molekul v tekutinách, pohybem volných elektronů v kovech nebo vibrací fononů¹ v izolátorech.

- Přenos tepla vedením je nejvýznamnější u tuhých materiálů, kde jsou atomy v těsném kontaktu. U kapalin nebo plynů jsou molekuly řidče rozmístěny a je tedy nižší šance jejich kolize a předání tepelné energie.
- Kovy jsou nejlepšími vodiči tepelné energie. To je způsobeno kovovou vazbou (na rozdíl od kovalentní nebo iontové vazby), ve které valenční elektrony atomů tvoří tzv. elektronový plyn. Elektrony jsou sdílené všemi atomy a mohou se v mřížce volně pohybovat. Tyto elektrony jsou schopny rychle přenést tepelnou energii z jednoho místa na druhé.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

¹ Fonon je kvazičástice šířící vibrační kvantum v krystalové mřížce. Pomocí fononů popisujeme šíření zvukových vln v krystalech.

Schopnost přenosu tepla lze kvantifikovat tepelnou vodivostí λ ($\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$). Ta je definována jako množství tepla Q (J), které lze přenést za jednotku času Δt (s) přes stěnu jednotkové tloušťky Δl (m) ve směru normály vyvolané jednotkovým teplotním gradientem ΔT (K).

Hustotu tepelného toku vedením lze kvalitativně vyjádřit jako

$$q'_{\text{cond.}} = -\lambda \cdot \text{grad } T,$$

kde $q'_{\text{cond.}}$ je hustota konduktivního tepelného toku (Wm^{-2}), λ je tepelná vodivost a T termodynamická teplota. Dále zavedeme teplotní gradient vztahem

$$\mathbf{G} = -\text{grad } T.$$

Vztah mezi teplotním gradientem a hustotou tepelného toku je

$$\mathbf{q} = \lambda \mathbf{G}.$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Teplotní pole je obecně zřídlové a nevírové. Musí tedy platit rovnice teplotního gradientu

$$\operatorname{rot} \mathbf{G} = 0, \quad \oint_c \mathbf{G} d\mathbf{l} = 0.$$

a rovnice kontinuity tepelného toku (stacionární případ)

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = p, \quad \oint_S \mathbf{q} d\mathbf{S} = P.$$

$\lambda \text{ (Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\text{)}$	
Měď	385
Hliník	237
Železo	80
Beton	1,23
Cihla	0,418
Sklo	0,14



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Mezi teplotním a elektrickým polem existuje silná analogie. Je to dáno vlastním principem. Dominantní způsob vedení je u kovů pro tepelnou i elektrickou vodivost stejný (volné elektrony), je logické že mezi oběma vodivostmi existuje závislost definovaná jako **Wiedemann-Franzův zákon**

$$LT = \frac{\lambda}{\gamma},$$

kde λ je tepelná vodivost, γ elektrická vodivost a $L = 2.45 \cdot 10^{-8} \text{ (W}\Omega\text{K}^{-2})$ (Lorentzovo číslo) je konstanta úměrnosti.

Wiedemann-Franzův zákon určuje, že poměr mezi tepelnou a elektrickou vodivostí u kovů se úměrně (lineárně) mění s teplotou.

Princip lze vysvětlit tak, že volné elektrony se u kovů podílejí na přenosu tepla i elektrického náboje. Tepelná vodivost roste s průměrnou rychlostí/vibrací elektronů, protože ta zvyšuje schopnost přenosu tepelné (neuspořádané) energie. Elektrická vodivost se však s nárůstem rychlosti částic (neuspořádaného pohybu – „tepelné“ vibrace) snižuje, protože srážky elektronů s jádry atomů snižují schopnost uspořádaného orientovaného pohybu elektronů.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Podobně jako u elektrického pole lze tedy definovat i tepelný odpor materiálu

$$R = \frac{d}{\lambda \cdot S} \text{ (KW}^{-1}\text{)}, \quad \left(R_{\text{el}} = \frac{l}{\gamma \cdot S} \text{ (}\Omega\text{)} \right)$$

kde d je tloušťka izolačního materiálu a S jeho plocha.

!!! Neplést tepelnou a teplotní vodivost !!!

Teplotní vodivost

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$$

zahrnuje tři fyzikální konstanty materiálu (tepelnou vodivost λ , hustotu ρ a měrnou tepelnou kapacitu c_p) a komplexně charakterizuje každou látku. Čím vyšší je a , tím rychleji se těleso ohřívá nebo ochlazuje.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Rovnice vedení tepla v diferenciálním tvaru platí jen v regulárních bodech prostředí. Regulárními body nejsou například body, které oddělují jedno prostředí od druhého a kde dochází ke skokové změně vodivosti λ . Stavové vektory gradientu teplotního pole $\mathbf{G}$ a tepelného toku $\mathbf{q}$ se mění nespojitě.

- Podmínka pro $\mathbf{G} = -\text{grad } T$

$$G_{1t} - G_{2t} = 0$$

- Podmínka pro $\mathbf{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T$

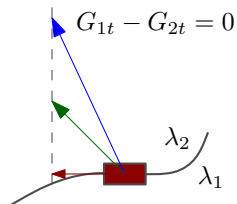
$$q_{1n} - q_{2n} = \frac{P}{\Delta S} = q'$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

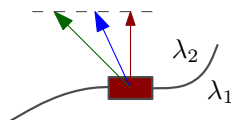


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



Teplotní gradient

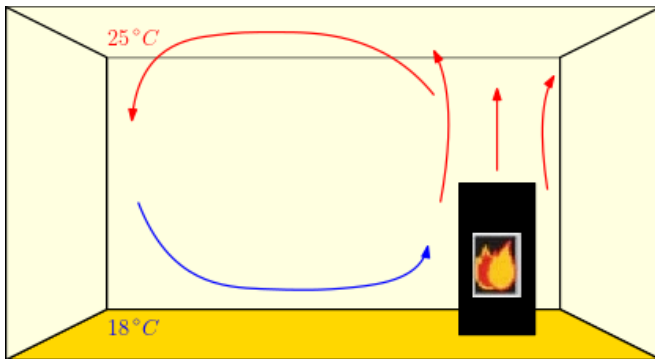
$$q_{1n} - q_{2n} = 0$$



Tepelný tok

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Prouděním rozumíme přesun tepla z jednoho místa do druhého prostřednictvím tekutiny nebo plynu. Tento způsob přenosu tepla je v těchto skupenstvích dominantní.



Příkladem je například proudění vzduchu v místnosti.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

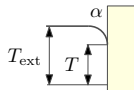
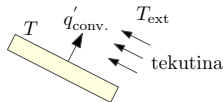


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Konvekce je přenos tepelné energie mezi tuhými tělesy a proudícími tekutinami. S rychlostí pohybu tekutiny se také zvyšuje tepelný tok způsobený konvekcí. Konvekci lze rozdělit na dvě základní kategorie:

- Přirozená konvekce je podmíněna přítomností tuhého tělesa v tekutině a rozdílem teplot jeho povrchu a okolního prostředí. Jako příklad můžeme uvést přirozenou konvekci tepelného toku z budovy.
- Vnucená konvekce je vyvolána nuceným pohybem tekutiny v okolí tuhého tělesa. Příkladem může být chlazení tělesa pomocí ventilátoru nebo proudící vody.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Hustotu konvektivního tepelného toku lze zapsat jako

$$q'_{\text{conv.}} = \alpha (T - T_{\text{ext}}),$$

kde $q'_{\text{conv.}}$ hustota tepelného toku, α je koeficient přestupu tepla, který obecně závisí na hustotě a rychlosti a teplotě proudící tekutiny, T termodynamická teplota a konečně T_{ext} teplota okolní proudící tekutiny.

	$\alpha \text{ (Wm}^{-2}\text{K}^{-1}\text{)}$
vzduch (přirozená konvekce)	2 – 25
kapaliny (přirozená konvekce)	50 – 1000
vzduch (vnucená konvekce)	25 – 250
kapaliny (vnucená konvekce)	100 – 20000
konvekce s fázovou změnou (var nebo kondenzace)	2500 – 100000



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



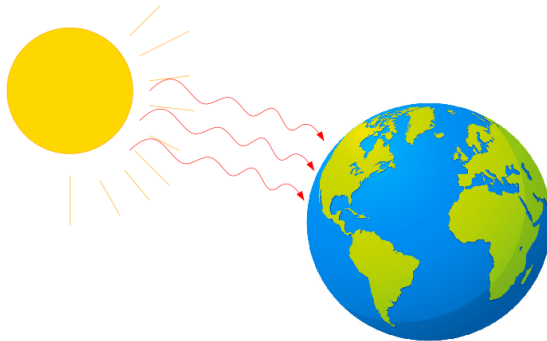
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Teplotní pole

Přenos tepla radiací

Radiací rozumíme přenos tepla do okolního prostoru elektromagnetickými vlnami. Tuto energii emituje každé těleso s nenulovou teplotou. Tepelná energie ze Slunce putuje ve formě elektromagnetického vlnění až k naší planetě. Dalším příkladem může být teplo emitované domácím topením - infra panelem.



Pro život je nejdůležitější přenos tepla radiací ze slunce.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



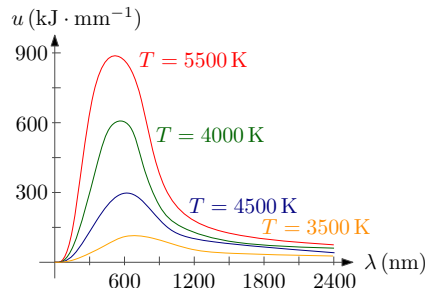
podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Wienův posunovací zákon

Schopnost tělesa pohlcovat nebo vyzařovat elektromagnetické záření je závislá na vlnové délce. Množství energie vyzařené tělesem se tedy mění s frekvencí a její množství je popsáno Wienovým posunovacím zákonem

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{T}.$$

Tento vztah znamená, že čím je vyšší teplota T , tím více se maximum záření posunuje na stranu kratších vlnových délek. Hodnota 2.898 mmK je tzv. Wienova konstanta.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Emisivita povrchu každého tělesa závisí na vlnové délce elektromagnetického záření vysílaného tělesem a tedy i na teplotě povrchu.

Těleso vyzařuje svým povrchem při nízké teplotě pouze záření dlouhovlnné, infračervené.

S rostoucí teplotou se křivka spektrální zářivosti zvyšuje směrem nahoru a současně svůj vrchol posouvá ke kratším vlnovým délkám.

Při stoupající teplotě tělesa vidíme napřed jeho povrch jako temně červený a postupně se barva mění v oranžovou, žlutou až bílou v souladu s tím, jak se zvětšuje ta část emisní plochy, která zasahuje do viditelného spektra

Na tomto principu je pak definována tabulka žíhacích a popouštěcích barev.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Teplotní pole

Přenos tepla radiací

Žihací barvy		Popouštěcí barvy	
Popis barev	Přibližná teplota	Popis barev	Přibližná teplota
Tmavěhnědá	550°C	Světležlutá	200°C
Hnědočervená	630°C	Slámověžlutá	220°C
Tmavěčervená	680°C	Zlatá	230°C
Tmavětřešňová	740°C	Žlutohnědá	240°C
Třešňová	780°C	Hnědočervená	250°C
Světlešněžná	810°C	Červená	260°C
Světlečervená	850°C	Purpurová	270°C
Světlejičervená	900°C	Fialová	280°C
Červenožlutá	950°C	Tmavěmodrá	290°C
Sv. červenožlutá	1000°C	Chrpověmodrá	300°C
Žlutá	1100°C	Světlemodrá	320°C
Světležlutá	1200°C	Modrošedá	340°C
Žlutobílá	1300°C	Šedá	360°C



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Každé těleso s nenulovou termodynamickou teplotou září.



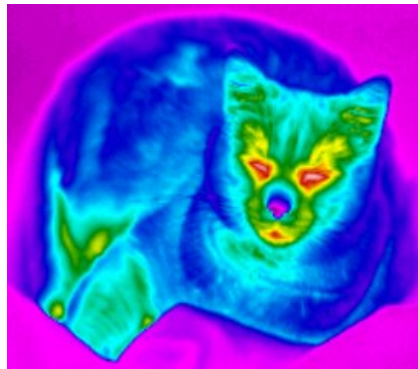
Kocour ve viditelném spektru



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

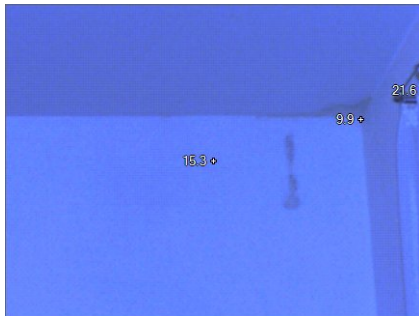


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

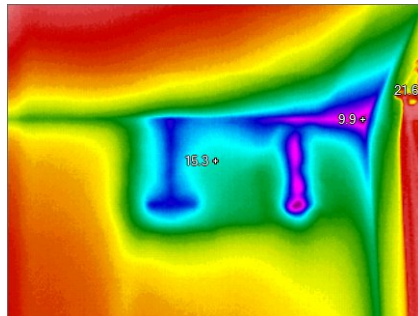


Kocour v infra spektru

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)



Roh v bytě ve viditelném spektru



Roh v bytě v infra spektru



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Plyny absorbují a emitují energii v charakteristických vzorcích vlnových délek a je tedy možné je tímto způsobem identifikovat. Viditelné světlo je jiná forma elektromagnetického záření s nižší vlnovou délkou (a tedy vyšší frekvencí) než je vlnová délka infračerveného světla.

Hustotu tepelného toku emitovaného radiací lze vyjádřit vztahem

$$q'_{\text{conv.}} = \epsilon \sigma (T^4 - T_{\text{ext}}^4),$$

kde $\epsilon \in \langle 0, 1 \rangle$ je emisivita povrchu, $\sigma = 5,670374 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ je Stefanova–Boltzmannova konstanta a T_{ext} je teplota okolních objektů jako jsou například stěny.

Emisivita daného materiálu je závislá nejen na barvě povrchu ale i na jeho čistotě a drsnosti. Z těchto důvodů a snazšímu nastavení emisivity v průběhu měření se často používá nátěr matnou černou barvou.

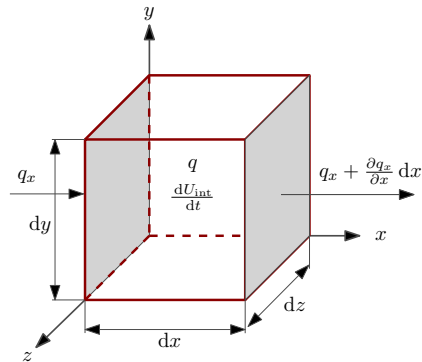
	$\epsilon (-)$
cihla	0,93
beton	0,88
železo	0,25
měď (oxidovaná)	0,50
měď (leštěná)	0,04



Uvažujme homogenní médium dle obrázku. Celkovou energetickou bilanci systému lze s přihlédnutím k prvnímu zákonu termodynamiky vyjádřit vztahem

$$P_{\text{in}} - P_{\text{out}} = \frac{dU_{\text{int}}}{dt} + P_g,$$

kde veličina P_{in} a P_{out} představuje vstupující a vystupující tepelný tok, P_g vyjadřuje výkon generovaný v objemu vnějším zdrojem (například Jouleovy ztráty) a konečně člen $\frac{dU_{\text{int}}}{dt}$ představuje změnu vnitřní energie systému.



Rozdíl tepelného toku P_{in} a P_{out} ve směru osy x lze zapsat ve tvaru

$$P_{\text{in},x} - P_{\text{out},x} = \int_S \left(q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) \right) dy dz = \int_V -\frac{\partial q_x}{\partial x} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dV.$$

Obdobným způsobem získáme rozdíl tepelného toku i ve směrech os y a z , který můžeme souhrnně vyjádřit vztahem

$$P_{\text{in}} - P_{\text{out}} = \int_V \text{div } \lambda \text{ grad } T dV.$$

Poznamenejme, že stejného výsledku bychom dosáhli integrací celkového toku přes povrch elementární krychle a následným použitím Gaussovy věty

$$P_{\text{in}} - P_{\text{out}} = - \oint_S \mathbf{q} d\mathbf{S} = - \int_V \text{div } \mathbf{q} dV = \int_V \text{div } \lambda \text{ grad } T dV.$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Změna vnitřní energie systému akumulované v objemu dV je dána vztahem

$$\frac{dU_{\text{int}}}{dt} = \int_V \rho c_p \frac{dT}{dt} dV,$$

kde ρ je hustota materiálu a c_p je tepelná kapacita. Úplnou časovou derivaci lze dále rozepsat

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } T,$$

kde člen $\frac{\partial T}{\partial t}$ představuje rychlost akumulace vnitřní energie a člen $\mathbf{v} \cdot \text{grad } T$ rychlost konvektivního toku vlivem pohybu média (nejčastěji tekutiny). Ve většině praktických případů si vystačíme s časovou změnou a rychlostní člen nebudeme uvažovat. Tento člen se ovšem silně uplatní u zařízení na míchání nebo čerpání roztavených kovů.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Člen představující výkon generovaný vnějším zdrojem lze zapsat ve tvaru

$$P_g = \int_V p \, dV,$$

kde veličina p představuje měrný výkon dodaný vnějším zdrojem. Dosazením všech členů do tepelné bilance získáme následující rovnici

$$\int_V \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T \, dV = \int_V \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T \right) dV + \int_V p \, dV,$$

Eliminací elementárního objemu dV (bilance musí platit pro libovolný objem) získáme nestacionární Fourierovu–Kirchhoffovu parciální diferenciální rovnici vedení tepla ve tvaru

$$-\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T \right) = p,$$

kde T je termodynamická teplota, ρ je měrná hmotnost materiálu, c_p je tepelná kapacita a p je vnější zdroj tepla.



V lineárním případě lze vodivost λ vytknout před operátor divergence a dostaneme rovnici ve tvaru

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} T = -\frac{\rho c_p}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{p}{\lambda}.$$

V případě stacionárního stavu je derivace na pravé straně nulová a rovnice přejde v Poissonovu rovnici

$$\Delta T = -\frac{p}{\lambda}.$$

Rozložení teploty v prostředí bez vnitřních zdrojů je popsáno Laplaceovou rovnicí.

$$\Delta T = 0.$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

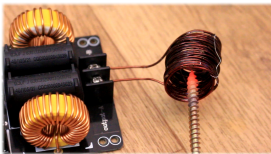
podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Indukční ohřev

Indukční ohřev



Indukční vařič - <https://careershapers.wordpress.com/>



Homemade indukční ohřev - <https://electronoobs.com/>



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



Indukční tavící kelímek v Belgii - <https://www.induction-furnaces.com/>

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Speciální oblastí v teplotních problémech je indukční ohřev. Jedná se o samostatnou kapitolu s obrovským potenciálem pro praxi. Indukční ohřev ve velké míře nahradil či nahrazuje konvenční způsoby ohřevu v řadě průmyslových odvětví.

V praxi má využití od ohřevu jídla až po velké tavící pece s objemem mnoho tun. Mezi hlavní výhody patří:

- efektivita - ohřívá se přímo vsázka (vnitřní zdroj)
- snadná regulace a lokalizovatelnost
- čistota provozu, ekologie
- lze provozovat v ochranné atmosféře

V případě indukčního ohřev jde o využití principu elektromagnetické indukce. Harmonický proud protékající vodičem (zpravidla o vyšších frekvencích v řádu kHz) generuje harmonické elektromagnetické pole a ve vsázce díky principu elektromagnetické indukce dochází k indukci napětí. Je-li vsázka vodivá, začnou jí protékat vířivé (Foucaultovy) proudy a v důsledku vzniklých Jouleových ztrát se vsázka začne ohřívat.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

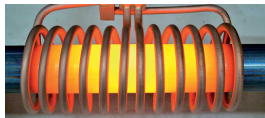


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

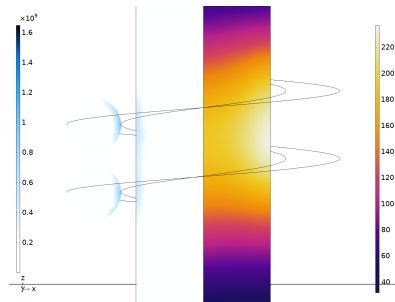
podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Vířivé proudy a tedy i ohřev je díky fyzikálním principům dominantní při povrchu vsázky, proto je také označován jako povrchový ohřev. Pro praktické využití je důležitý známý vztah pro hloubku vniku

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu}}.$$



ceia-power.com



Rozložení ztrát (vlevo) a teploty (vpravo) v řezu

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Z pohledu modelování se jedná o sdruženou úlohu elektromagnetického a teplotního pole.

Sdruženou úlohou rozumíme problematiku více fyzikálních oblastí popsanou několika různými parciálními diferenciálními rovnicemi řešenou s určitou mírou provázanosti.

Harmonické elektromagnetické pole lze popsat dříve odvozenou Helmholtzovou rovnicí ve tvaru pro harmonické veličiny

$$\Delta \underline{A} - j\omega\gamma\mu\underline{A} = -\mu\underline{J}_{\text{ext}},$$

kde je využito převodu rovnice do komplexní rovnice a komplexního operátoru. K tomu je nutné uvažovat po částech lineární prostředí a dále je zanedbán člen s rychlostí.

Člen $-j\omega\gamma\mu\underline{A}$ odpovídá vířivým proudům, respektive proudové hustotě indukovaných proudů.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Teplotní pole je popsané rovnicí Fourier-Kirchhoffovou

$$\operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - w ,$$

kde je opět zanedbán pohybový člen.

Proměnná w respektuje vnitřní zdroje ohřevu. V případě kombinace teplotního pole s polem elektromagnetickým jsou takovýmto zdrojem ztráty, které lze rozdělit na ztráty vířivými proudy (Jouleovy) a ztráty hysterezní

$$w = w_J + w_H .$$

Hysterezní ztráty mají dominantní vliv pouze při nižších frekvencích, například jako ztráty v transformátorech či točivých strojích. Při frekvencích v řádech kHz již lze hysterezní ztráty vůči ztrátám vířivými proudy, bez větší chyby, zanedbat a lze tak definovat vazbu mezi elektromagnetickým polem (jakožto generátorem ztrát) a polem teplotním (kde jsou zdrojovou veličinou)

$$w = w_J = \frac{|\underline{J}_{\text{ind}}|^2}{2\gamma} = \frac{|\underline{-j\omega\mu\gamma\underline{A}}|^2}{2\gamma} .$$



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

podklady byly zhotoveny za podpory projektu ESF II
(reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Děkuji za pozornost

Katedra elektrotechniky a počítačového modelování
Elektrotechnická fakulta
Západočeská univerzita v Plzni