

# Stacionární a nestacionární magnetické pole

Modelování multifyzikálních problémů

Katedra elektrotechniky a počítačového modelování  
Fakulta elektrotechnická  
Západočeská univerzita v Plzni

26. května 2021

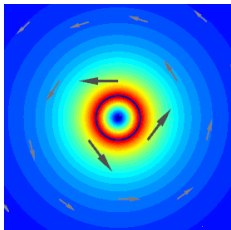


**FACULTY OF ELECTRICAL  
ENGINEERING**  
UNIVERSITY  
OF WEST BOHEMIA

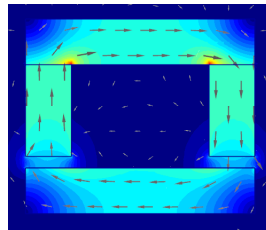
## Magnetické pole

# Magnetické pole

Magnetické pole vzniká v okolí pohybujících se nábojů tedy např. v okolí vodičů protékaných proudem. Zdrojem magnetického pole jsou také permanentní magnety.



Magnetické pole vybuzeé vodičem protékaným proudem



Magnetické pole vybuzeé permanentním magnetem



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

- Magnetická indukce je definována jako síla působící na jednotkový náboj (magnetická složka Lorentzovy síly)

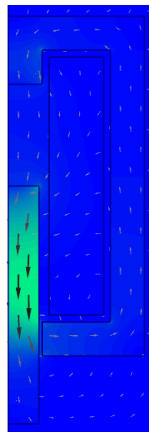
$$\mathbf{F}_{L,m} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Materiálová rovnice

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

- Magnetické napětí

$$U_{m,AB} = \int_A^B \mathbf{H} \, d\mathbf{l}$$



Aktuátor



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

- První Maxwellova rovnice

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

magnetické pole je vírové

- Čtvrtá Maxwellova rovnice (zákon kontinuity)

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

magnetické pole je nezřídlové

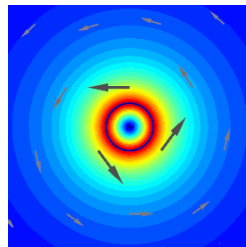


EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)



Vodič (siločáry jsou uzavřené)

Vztah mezi magnetickou indukcí a intenzitou pole je dán permeabilitou

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \frac{B}{H},$$

kde  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  je permeabilita vákua.

Magnetické materiály lze obecně rozdělit:

- Diamagnetika – jejich relativní permeabilita je o málo menší než 1, v magnetickém poli dochází k nepatrnému zeslabení magnetické indukce (měď)
- Paramagnetika – jejich relativní permeabilita je o málo větší než 1, v magnetickém poli dochází k nepatrnému zesílení magnetické indukce (hliník)
- Feromagnetika – jejich relativní permeabilita je výrazně větší než 1, v magnetickém poli dochází k silnému zesílení magnetické indukce (železo)



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

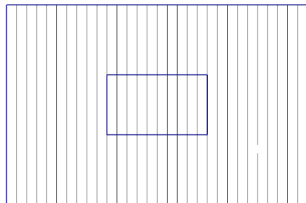


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

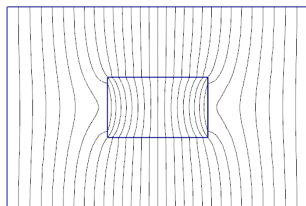
the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

# Magnetické pole

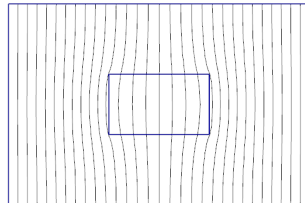
## Základní vztahy



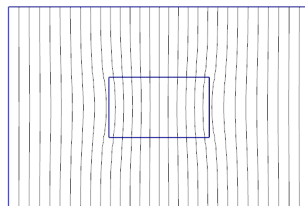
Vakuum ( $\mu_r = 1$ )



Feromagnetikum ( $\mu_r \gg 1$ )



Diamagnetikum ( $\mu_r < 1$ )



Paramagnetikum ( $\mu_r > 1$ )



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

### Diamagnetismus

- Diamagnetika jsou složena z atomů, jejichž výsledný moment je nulový
- V diamagnetické látce se ve vnějším magnetickém poli změni uspořádání elektronových obalů atomů látky, čímž vzniknou magnetické dipóly, jejichž magnetické pole působí proti vnějšímu magnetickému poli
- V diamagnetiku dochází k mírnému zeslabení vnějšího magnetického pole

### Paramagnetismus

- Částice paramagnetické látky mají trvalý magnetický moment i za nepřítomnosti vnějšího pole (vliv nepárových elektronů v orbitalech)
- V paramagnetikách na sebe dipóly nepůsobí a při nepřítomnosti vnějšího pole jsou náhodně orientovány (vlivem tepelných kmitů mřížky) a celkový magnetický moment je nulový
- Dipóly paramagnetika ve vnějším magnetickém poli se natočí ve směru vnějšího pole a vzniká celkový magnetický moment, který je orientován ve směru působení vnějšího pole
- V paramagnetiku dochází k mírnému zesílení vnějšího magnetického pole



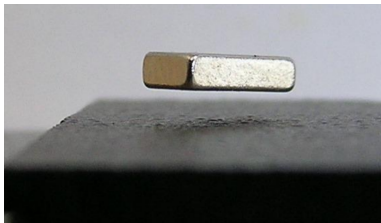
EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



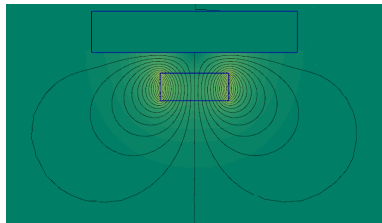
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

- Ideální diamagnetikum (supravodiče) ze svého objemu magnetické pole zcela vytlačí
- Supravodiče jsou materiály, které při ochlazení pod určitou teplotu vykazují neměřitelný odpor při vedení elektrického proudu a velmi intenzivně vytěsňují magnetické pole ze svého objemu
- Supravodiči nejsou pouze kovy, ale moderní supravodiče jsou materiály na bázi keramik
- Z hlediska magnetických vlastností jsou supravodiče tzv. perfektní diamagnety (vytlačují siločáry magnetického pole ze svého objemu)



Supravodič – ideální diamagnetikum



Model ideálního diamagnetika



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



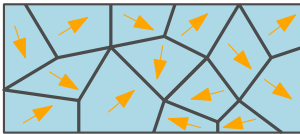
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

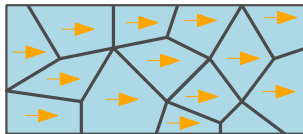
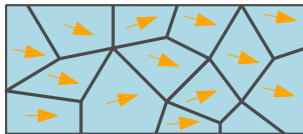
# Magnetické pole

## Základní vztahy

- Magnetická látka se skládá z domén spontánní magnetizace (Weissovy domény oddělené Blochovými stěnami) – malé Oblasti o rozměrech řádově  $10^{-3}$  mm
- Každá doména je sama o sobě elementárním magnetem
- Jednotlivé domény jsou vůči sobě orientovány zcela náhodně



- Působením vnějšího magnetického pole se domény mohou uspořádat (magnetizace)



Částečně (vlevo) a plně (vpravo) zmagnetizované feromagnetikum



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



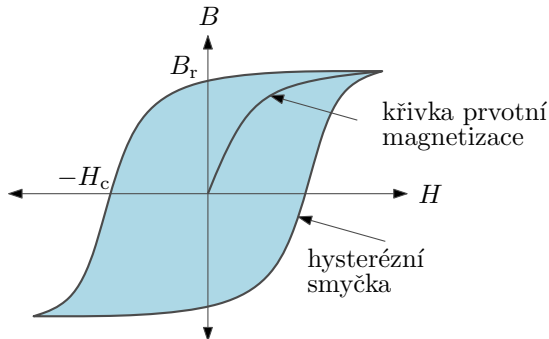
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

# Magnetické pole

## Hysterézní smyčka

- Při cyklickém magnetování feromagnetik je závislost magnetické indukce na intenzitě pole dána hysterézní smyčkou
- Remanentní indukce  $B_r$ , koercitivní síla  $H_c$
- široká hysterézní křivka (permanentní magnety), úzká smyčka (magnetické materiály pro výrobu elektrických strojů)



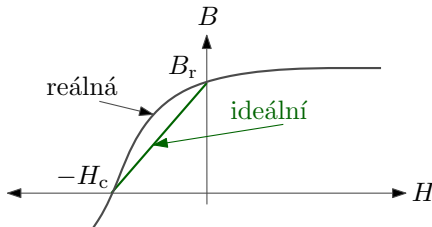
EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

- Magneticky tvrdá feromagnetika mají křivku s malou strmostí a širokou hysterézní křivkou. Mají zpravidla nízkou permeabilitu a vysokou hodnotu koerzivní síly  $H_C$ . Magneticky tvrdé materiály se proto používají jako permanentní magnety.
- Tvrdé ferity – 80% oxidu železa + 20% oxidu baria (BaO) nebo stroncia (SrO) – levné a spolehlivé permanentní magnety
- Magnety na bázi vzácných zemin – neodym-železo-bor (NdFeB) – tento materiál je v současnosti nejsilnějším typem magnetu s vynikajícími magnetickými vlastnostmi a vůbec nejvyšší vnitřní energií. Lze je ovšem provozovat pouze při poměrně nízké provozní teplotě (mezi 80 - 150 °C)

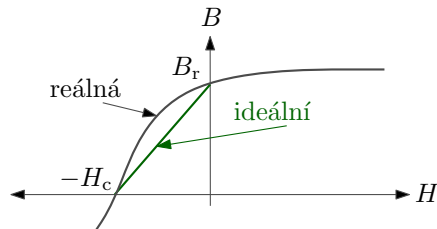


EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)



- Z uvedeného obrázku snadno získáme

$$B = \frac{B_r}{H_c} \cdot H + B_r = \mu_0 \mu_r H + B_r$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Vyjdeme z kontinuity magnetického toku ( $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  a zároveň platí  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ )

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Vlastnosti vektorového potenciálu:

- Spojitost vektorového potenciálu – potenciál  $\mathbf{A}$  je ve všech bodech spojitou funkcí polohy.
- Nejednoznačný – může se lišit o konstantu  $K$  a navíc o gradient libovolné skalární funkce  $\psi$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} (\mathbf{A} + \mathbf{K} + \operatorname{grad} \psi).$$

Klademe doplňující podmínku, jejíž volbou omezíme třídu funkcí  $\psi$  ve tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Tato podmínka se nazývá Coulombova (někdy také kalibrační).

- Vhodný pro nepřímé řešení (okrajové úlohy pro potenciál).



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

### Otázka:

Proč zavádíme další vektorovou veličinu? Magnetická indukce  $\mathbf{B}$  i magnetický potenciál  $\mathbf{A}$  jsou vektorové funkce.

### Odpověď:

- Spojitost potenciálu.
- Speciální případ dvojrozměrné úlohy

$$\mathbf{B}(x, y) = \text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Pro magnetické pole  $\mathbf{B}(x, y)$  má vektorový magnetický potenciál  $\mathbf{A}$  pouze složku  $A_z$  ve směru osy  $z$ . Lze ho tedy považovat za skalární veličinu.



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

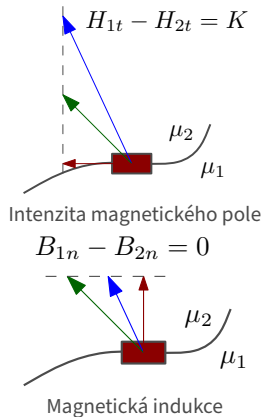
Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru platí jen v regulárních bodech prostředí. Regulárními body nejsou například body, které oddělují jedno prostředí od druhého a kde dochází ke skokové změně permeability  $\mu$ . Stavové vektory magnetické indukce  $\mathbf{B}$  a magnetické intenzity  $\mathbf{H}$  se mění nespojitě.

### ■ podmínka pro $\mathbf{H}$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$

### ■ podmínka pro $\mathbf{B}$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Vyjdeme z Ampérova zákona v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

a vztahu zavádějící magnetický vektorový potenciál

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Dosazením do předchozí rovnice získáme parciální diferenciální rovnici ve tvaru

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}.$$

V lineárním případě lze  $\mu$  vytknout před operátor rotace a dostaneme rovnici ve tvaru

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}.$$

Z vektorové identity dále plyne

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{A}.$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Za využití Coulombovy kalibrační podmínky

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

získáme

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}.$$

Z vektorové identity ( $\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A}$ ) dále plyne

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}.$$

Odvozenou rovnici nazýváme Poissonovou rovnicí (obsahuje nenulovou pravou stranu). V prostředí bez vnějšího zdroje proudu ( $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ) pak rovnice přejde na Laplaceovu rovnici ve tvaru

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Vektorový potenciál popisující stacionární magnetické pole v lineárním prostředí musí splňovat Laplaceovu nebo Poissonovu rovnici. Jednoznačné řešení je nutné zajistit pomocí okrajových podmínek.

Magnetické obvody jsou často tvořeny feromagnetickými materiály, a proto je většinou nutné řešit rovnici v její nelineární formě. Se zahrnutím vlivu permanentních magnetů nabývá pak tvaru

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) = \mathbf{J}.$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

V oblastech bez elektrického proudu je pravá strana Ampérova zákona nulová. Pole není vírové a lze zavést analogicky s elektrickým polem magnetický skalární potenciál  $\varphi_m$

$$\mathbf{H} = \text{grad } \varphi_m.$$

Vztah mezi magnetickou indukcí a intenzitou magnetického pole za přítomnosti oblasti s permanentními magnety lze zapsat

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r,$$

kde  $\mathbf{B}_r$  představuje remanentní magnetickou indukci. V analogii, lze odvodit parciální diferenciální rovnici ve tvaru

$$-\text{div } (\mu \cdot \text{grad } \varphi_m - \mathbf{B}_r) = 0.$$

S využitím této rovnice pro skalární potenciál  $\varphi_m$  lze řešit poměrně složité úlohy ve 3D při značné redukci množství proměnných (magnetický vektorový potenciál má 3 složky a skalární pouze jednu)



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

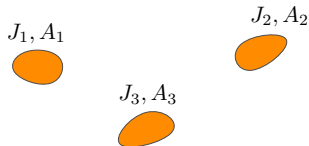


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Cívka je akumulačním prvkem. Nedochází tedy k disipaci energie, ale k jejímu uskladnění.

Mějme soustavu  $n$  vodičů protékaných proudy s hustotou  $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_n$  s potenciály  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$  v prostředí s konstantní permeabilitou  $\mu$ .



Energie soustavy je

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_1^n \int_V \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A}_i dV.$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

V případě tenkého vodiče lze vztah dále upravit do tvaru

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \mathbf{A} dV = \frac{1}{2} \oint_c \mathbf{A} d\mathbf{l} \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \phi I = \frac{1}{2} L I^2.$$

Připomeňme

$$\phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_c \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad L = \frac{\phi}{I}.$$

Z uvedeného vztahu plyne energetická definice indukčnosti

$$L = \frac{2W_m}{I^2}.$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

# Magnetické pole

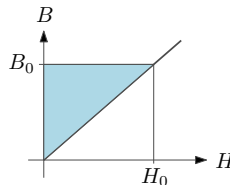
## Energie ve stacionárním magnetickém poli

Energii magnetického pole lze také vyjádřit přímo pomocí vektorů pole  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{B}$ . Hustotu energie lze zapsat ve tvaru

$$w_m = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \, d\mathbf{B}.$$

V případě lineárního izotropního prostředí (LIH) je permeabilita konstantní

$$w_m = \int_0^B \frac{B}{\mu} \, dB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} HB.$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



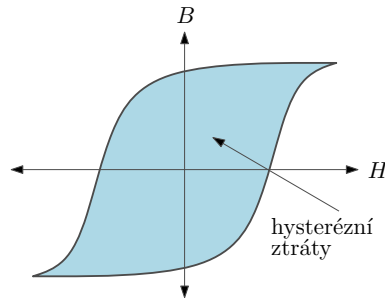
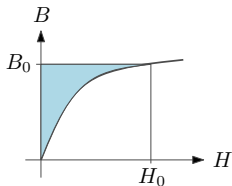
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

# Magnetické pole

## Energie ve stacionárním magnetickém poli

Feromagnetické materiály jsou však nelineární. Permeabilita je funkcí magnetické indukce  $\mu(\mathbf{B})$ . Hysterezní ztráty, které souvisí s periodickým magnetováním feromagnetika, jsou spojeny s plochou hysterezní křivky. Elektrické stroje se proto vyrábí z plechů s úzkou hysterezní křivkou.



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



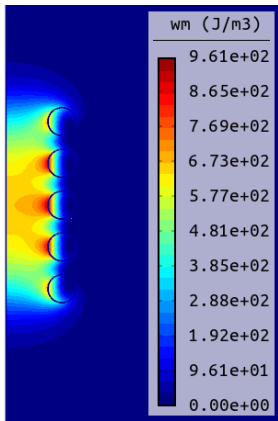
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

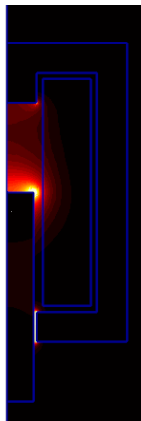
# Magnetické pole

Energie ve stacionárním magnetickém poli

Hustota energie je akumulována převážně ve vzduchových mezerách



Solenoid



Aktuátor (lineární motor)



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Lorentzovu sílu na náboj v elektromagnetickém poli lze obecně zapsat

$$\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Lorentzova síla na náboj v magnetickém poli je pak

$$\mathbf{F}_{L,m} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Magnetickou část lze dále převést za použití

$$Q\mathbf{v} = \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{J} dV$$

na tvar

$$\mathbf{F}_{L,m} = \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV.$$

V případě tenkého vodiče

$$\mathbf{F}_{L,m} = I \int_c (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Síla odvozená z energie magnetického pole

$$\mathbf{F}_m = \frac{dW_m}{ds} \Rightarrow \mathbf{F}_m = \text{grad } W_m.$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

- Zákon celkového proudu – Ampérův zákon

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Faradayův indukční zákon

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Gaussův zákon elektrostatiky

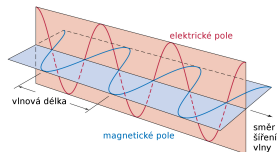
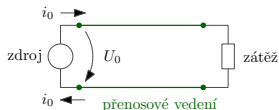
$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

- Zákon kontinuity indukčního toku

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

- Zákon kontinuity elektrického proudu (nepatří mezi MR)

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \left( I = \oint_S \mathbf{J} \, d\mathbf{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV \right)$$



Šíření elektromagnetické vlny



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Vynásobíme-li skalárně první Maxwellovu rovnici v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

vektorem  $\mathbf{E}$  a druhou

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

vektorem  $\mathbf{H}$ , má jejich rozdíl tvar

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{J} \mathbf{E} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Z vektorové identity plyne, že výraz na levé straně rovnice lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Získanou rovnici budeme dále integrovat přes objem  $V$

$$0 = \int_V \mathbf{J} \mathbf{E} \, dV + \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, dV + \int_V \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dV + \int_V \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \, dV.$$

Poslední člen převedeme pomocí Gauss-Ostrogradského věty na plošný integrál, za součin  $\mathbf{J} \mathbf{E}$  dosadíme intenzitu elektrického pole včetně vtištěných sil a získáme rovnici

$$\int_V \mathbf{J} \mathbf{E}_v \, dV = \int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\gamma} \, dV + \int_V \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, dV + \int_V \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \, d\mathbf{S},$$

kterou lze přepsat do tvaru

$$P_V = P_J + P_e + P_m + P_N,$$

kde  $P_V$  je výkon vtištěných sil,  $P_J$  jsou Jouleovy ztráty,  $P_e$  je výkon potřebný k vytvoření elektrického pole,  $P_m$  je výkon potřebný k vytvoření magnetického pole a konečně  $P_N$  lze interpretovat jako přenesený výkon.



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Součin

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1)$$

nazýváme Poyntingovým vektorem a má význam hustoty vyzářeného výkonu ( $\text{W}/\text{m}^2$ ). Celkový výkon přenesený Poyntingovým vektorem získáme integrací tohoto vektoru přes uvažovanou hranici

$$P_N = \oint_S \mathbf{N} \, d\mathbf{S}.$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

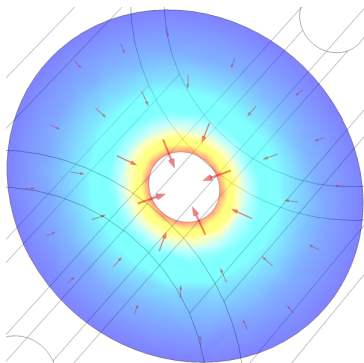


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

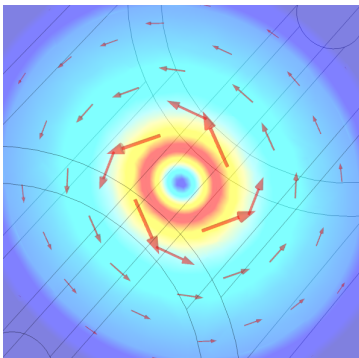
the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

# Magnetické pole

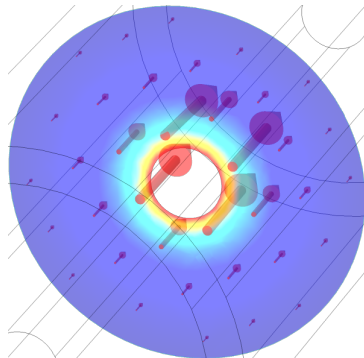
Šíření energie v koaxilním kabelu



Elektrické pole



Magnetické pole



Poyntingův vektor



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

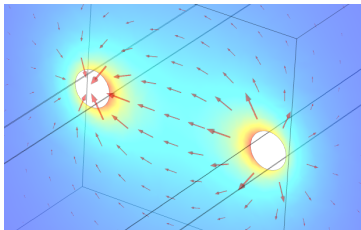


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

# Magnetické pole

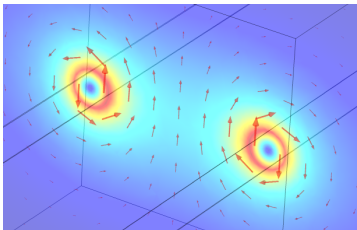
Šíření energie podél dvou vodičového vedení



Elektrické pole



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

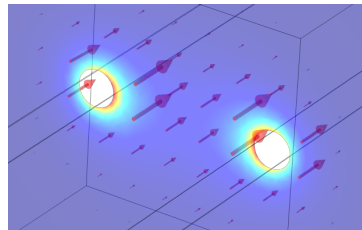


Magnetické pole



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)



Poyntingův vektor

V případě harmonických napájecích zdrojů lze s výhodou využít SKM

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow j\omega,$$

kde  $\omega = 2\pi f$  je úhlová frekvence. Maxwellovy rovnice lze pak zapsat ve tvaru

- Zákon celkového proudu – Ampérův zákon

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{J} + j\omega \underline{D}$$

- Faradayův indukční zákon

$$\text{rot } \underline{E} = -j\omega \underline{B}$$

- Gaussův zákon elektrostatiky

$$\text{div } \underline{D} = \rho$$

- Zákon kontinuity indukčního toku

$$\text{div } \underline{B} = 0$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Dle druhé Maxwellovy rovnice (Faradayův indukční zákon) vzniká vírové elektrické pole časovou změnou magnetického pole

$$u_i = \oint_c \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{d\phi}{dt}.$$

Napětí v uzavřené smyčce  $c$  protékané časově proměnným indukčním tokem  $\phi$  je nenulové. Nazýváme ho indukovaným napětím  $u_i$ . Pokud je navíc tato smyčka vodivá, protéká ji proud daný vztahem (indukčnost cívky  $L$  zanedbáme)

$$i_c = \frac{u_i}{R}.$$

Tento proud nazýváme vířivý proud. Poznamenejme, že tok  $\phi$  je celkový magnetický tok smyčkou. Derivace  $\frac{d}{dt}$  je substanciální (plná) a zahrnuje změnu toku tranformací i pohybem.

Hloubka vniku (proudová hustota klesne na 37 % své hodnoty na povrchu)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu}}$$



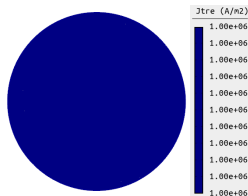
EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



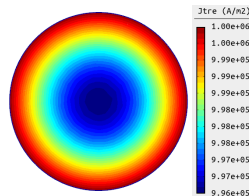
the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

# Magnetické pole

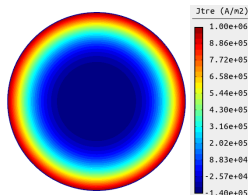
Indukované napětí



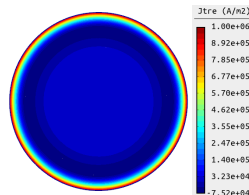
$f = 0 \text{ Hz}$



$f = 50 \text{ Hz}$



$f = 5000 \text{ Hz}$



$f = 50000 \text{ Hz}$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Při pomalých časových změnách lze zanedbat posuvný proud daný druhým členem pravé strany v I. MR. Model tedy vychází z následujících rovnic

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

a rovnice vycházející z Lorentzovy síly

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

kde  $\mathbf{E}'$  je zobecněná intenzita elektrického pole, která se skládá z intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  a intenzity elektrického pole indukovanou pohybem nábojů v magnetickém poli  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Dosazením Lorentzovy síly do II. MR získáme

$$\operatorname{rot} (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}) = -\frac{d \operatorname{rot} \mathbf{A}}{dt}.$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Záměnou časové derivace a prostorového operátoru rotace obdržíme

$$\text{rot} (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}) = -\text{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

a odstraněním operátoru rotace konečně získáme řešení ve tvaru

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi + \mathbf{g}(t)$$

(aplikace operátoru rotace na druhý a třetí člen pravé strany rovnice dá nulu). Nyní vynásobíme rovnici elektrickou vodivostí  $\gamma$  a získáme celkovou proudovou hustotu ve tvaru

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}' = \gamma \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A} - \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad} \varphi + \gamma \mathbf{g}(t)$$

a posoudíme fyzikální význam všech členů v získaném vztahu.



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Levá strana rovnice reprezentuje celkovou proudovou hustotu v daném bodě a pravá strana její jednotlivé složky. První z nich, dána pohybem v magnetickém poli, vyjadřuje pohybovou složku vířivých proudů

$$\mathbf{J}_{\text{pohyb}} = \gamma \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}.$$

Druhá z nich, daná časovou derivací magnetického pole, vyjadřuje transformační složku vířivých proudů. Jejich hustota je dána vztahem

$$\mathbf{J}_{\text{trans}} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Třetí člen představuje potenciální složku proudové hustoty (bez rotace), kterou lze interpretovat jako hustotu proudu z vnějšího zdroje pole

$$\mathbf{J}_{\text{pot}} = -\gamma \text{grad } \varphi.$$

Konečně čtvrtý člen (vektorová funkce závislá pouze na čase) může představovat proudovou hustotu jiného původu o velikosti

$$\mathbf{J}_{\text{ext}} = -\gamma \mathbf{g}(t).$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

## Nestacionární elektromagnetické pole

Pohybovou složku vířivých proudů lze převést do integrální tvaru

$$u_{i,p} = \oint_c \mathbf{E}_{\text{pohyb}} d\mathbf{l} = \oint_c (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}) d\mathbf{l} = \oint_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{l}.$$

Poznamenejme, že v případě kolmého pohybu vodičů v magnetickém poli  $((\mathbf{v} \perp \mathbf{B}) \parallel d\mathbf{l})$ , lze vztah zjednodušit do tvaru

$$u_{i,p} = \int_A^B v B d\mathbf{l}.$$

Transformační složku vířivých proudů lze převést do integrální tvaru

$$u_{i,t} = \oint_c \mathbf{E}_{\text{trans}} d\mathbf{l} = - \oint_c \frac{d\mathbf{A}}{dt} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18\_056/0013239)

Děkuji za pozornost

Katedra elektrotechniky a počítačového modelování  
Elektrotechnická fakulta  
Západočeská univerzita v Plzni