



Základy termodynamiky pro výpočet spalovací turbíny

Následující studijní materiál přináší přehled nejdůležitějších vzorců potřebných pro výpočet Ericson – Braytonova cyklu a jejich odvození.

Stavová rovnice

Stavová rovnice představuje vztah mezi základními stavovými veličinami termodynamického systému. Při našich výpočtech budeme počítat pouze s ideálním plynem – u takového plynu např. zanedbáváme rozměry molekul a jejich vzájemné tření. Představíme si tedy pouze rovnice pro ideální plyn:

$$p \cdot v = r \cdot T \quad (1)$$

$$p \cdot V = m \cdot r \cdot T$$

Kde:

p	$[Pa]$	tlak
v	$[m^3/kg]$	měrný objem $v = 1/\rho$
V	$[m^3]$	objem $V = v \cdot m$
T	$[K]$	teplota
m	$[kg]$	hmotnost
r	$[J/kg \cdot K]$	individuální plynová konstanta

$$r = \frac{R}{M} \quad (2)$$

R $[J/kmol \cdot K]$ univerzální plynová konstanta $R = 8314,41$

M $[kg/kmol]$ molární hmotnost

Kalorimetrická rovnice

Další důležitou rovnicí pro výpočet ideálního plynu je kalorimetrická rovnice popisující vztah mezi změnou tepla a změnou teploty. Opět ji můžeme vyjádřit několika tvary:

$$dq = c \cdot dT \quad (3)$$

$$dQ = m \cdot c \cdot dT$$

$$d\dot{Q} = \dot{m} \cdot c \cdot dT$$

q	$[J/kg]$	měrné teplo
Q	$[J]$	teplo
$\dot{Q}$	$[W]$	tepelný tok



c [J/kg · K] měrná tepelná kapacita (dle děje)
 $\dot{m}$ [kg/s] hmotnostní průtok

První zákon termodynamiky

První zákon termodynamiky představuje zákon o zachování energie termodynamické soustavy. Změna tepla této soustavy je dána součtem změny vnitřní energie a absolutní práce:

$$\begin{aligned} dq &= du + da \\ dQ &= dU + dA \end{aligned} \quad (4)$$

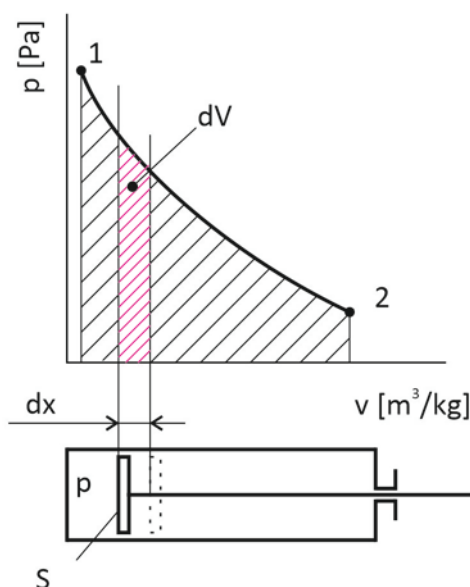
kde:

u [J/kg] měrná vnitřní energie – vnitřní energie je energie všech částic, z nichž se látka skládá. Jde především o kinetickou a potenciální energii částic, ale může sem patřit také elektrická či chemická energie.

a [J/kg] měrná absolutní práce

Pojem absolutní práce známe z fyziky základní školy. Práce je definována jako součin síly a dráhy, na které tato síla působí. My si odvození práce ukážeme na příkladu pneumatického válce, kde práce vzniká působením síly na píst s následným posunutím pístu o elementární dráhu dx .

$$dA = F \cdot dx \quad (5)$$



Sílu, působící na píst, můžeme vyjádřit z definice tlaku, která je pro nás taktéž známá již z fyziky základních škol.

$$p = \frac{F}{S} \quad (6)$$



$$F = p \cdot S$$

Po dosazení síly do původního vztahu (5) získáme:

$$dA = p \cdot S \cdot dx = p \cdot dV \quad (7)$$

$$da = p \cdot dv$$

Takto odvozenou změnu měrné absolutní práce můžeme dosadit zpět do prvního zákona (4):

$$dq = du + da = du + p \cdot dv$$

Entalpie

Entalpie je fyzikální veličina představující energii obsaženou v termodynamické soustavě. Je definována jako součet vnitřní energie a tzv. vlačovací práce, což je součin objemu a tlaku.

$$h = u + v \cdot p \quad (8)$$

Kde:

h [J/kg] měrná entalpie

$v \cdot p$ vlačovací práce

V diferenciálu bude mít měrná entalpie tvar:

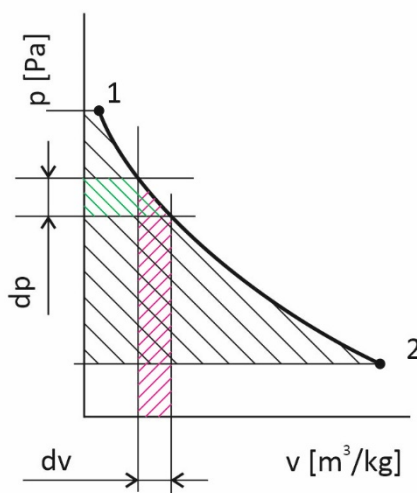
$$dh = du + vdp + pdv \quad (9)$$

Drobnými úpravami získáme opět první zákon termodynamiky (4):

$$dq = du + pdv = dh - vdp$$

Poslední člen takto získaného vztahu $-vdp$ představuje technickou práci:

$$da_t = -vdp \quad (10)$$





Zároveň jsme získali druhý tvar prvního zákona termodynamiky:

$$dq = dh - vdp = dh + da_t \quad (11)$$

Základní vratné změny

Základní vratné děje probíhají velmi pomalu v ideálním plynu. Rozeznáváme celkem pět základních změn.

Izobarický děj

Pro izobarickou vratnou změnu platí, že děj probíhá při konstantním tlaku. Napíšeme stavovou rovnici pro začátek a konec děje:

$$\left. \begin{aligned} p_1 \cdot v_1 &= r \cdot T_1 \\ p_2 \cdot v_2 &= r \cdot T_2 \end{aligned} \right\} p = \text{konst.} \Rightarrow p_1 = p_2 \quad (12)$$

Jejich podílem získáme Gay-Lussacův zákon:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} \quad (13)$$

Izochorický děj

Opět napíšeme stavovou rovnici pro začátek a konec děje, který tentokrát probíhá při konstantním objemu:

$$\left. \begin{aligned} p_1 \cdot v_1 &= r \cdot T_1 \\ p_2 \cdot v_2 &= r \cdot T_2 \end{aligned} \right\} v = \text{konst.} \Rightarrow v_1 = v_2 \quad (14)$$

Podílem těchto dvou rovnic získáme Charlesův zákon:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (15)$$

Izotermický děj

Jak z názvu vyplívá, v tomto ději je konstantou třetí stavová veličina – teplota.

$$\left. \begin{aligned} p_1 \cdot v_1 &= r \cdot T_1 \\ p_2 \cdot v_2 &= r \cdot T_2 \end{aligned} \right\} T = \text{konst.} \Rightarrow T_1 = T_2 \quad (16)$$

Podílem tentokrát získáme Boyleův – Mariotteův zákon:

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} = 1 \quad (17)$$

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$$

Adiabatický děj

Zatímco v předchozích třech vratných změnách byla vždy jedna ze stavových veličin konstantní, adiabatický děj se vyznačuje tím, že termodynamická soustava je tepelně odizolována od svého okolí, tj. nedochází k výměně tepla s okolím. Tuto změnu odvozujeme z obou tvarů prvního zákona termodynamiky (4), (11):



$$dq = du + pdv$$

$$dq = dh - vdp$$

Pro další odvozování uděláme krok stranou a nejprve se podíváme na aplikování prvního zákona na vybrané vratné změny:

izobarická změna

$$p = \text{konst.}$$

$$dq = dh + da_t = dh - v \cdot dp \quad | \quad dp = 0$$

$$dq = dh$$

Vidíme, že pro izobarickou změnu je změna měrného tepla rovna změně měrné entalpie. Změnu měrného tepla můžeme zjistit také z kalorimetrické rovnice (3)

$$dq = c \cdot dT$$

Spojením upraveného prvního zákona a kalorimetrické rovnice získáme následující vztah:

$$dq = dh = c_p \cdot dT \quad (18)$$

Kde c_p je měrná tepelná kapacita pro konstantní tlak. Z této rovnice vidíme, že změna entalpie je dána součinem měrné tepelné kapacity pro konstantní tlak a změny teploty. K obdobnému vztahu dospějeme při izochorickém ději.

izochorická změna

$$v = \text{konst.}$$

$$dq = du + da = du + p \cdot dv \quad | \quad dv = 0$$

$$dq = du = c_v \cdot dT \quad (19)$$

Nyní můžeme pokračovat v odvozování adiabatické rovnice. Jak již bylo řečeno, při adiabatické změně nedochází ke změně tepla:

$$dq = 0 = dh - vdp$$

$$dq = 0 = du + pdv$$

$$dh = vdp$$

$$du = -pdv$$

Nyní nahradíme změnu měrné entalpie a měrné vnitřní energie získanými vztahy (18) a (19) a následně obě rovnice podělíme

$$dh = c_p \cdot dT = vdp$$

$$du = c_v \cdot dT = -pdv$$

$$\frac{c_p}{c_v} = -\frac{vdp}{pdv}$$



Poměrem měrných tepelných kapacit pro konstantní tlak a objem je definována Poissonova konstanta:

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa \quad (20)$$

Dosadíme Poissonovu konstantu do původního vztahu a provedeme separaci proměnných

$$\begin{aligned} \frac{c_p}{c_v} = \kappa &= - \frac{v dp}{p dv} \\ \kappa \cdot \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} &= 0 \end{aligned}$$

Integrací vztahu získáme

$$\kappa \cdot \ln v + \ln p = \ln(v^\kappa \cdot p) = C$$

Odtud již získáme hledanou rovnici adiabaty

$$p \cdot v^\kappa = \text{konst} \quad (21)$$

Polytropický děj

Poslední vratnou změnou je polytropická změna. Jedná se prakticky o obecný popis vratných změn, z čehož vyplývá, že její pomocí bychom měli být schopni popsat všechny čtyři děje předchozí, což si zanedlouho dokážeme. Rovnice polytropy je obdobou rovnice adiabaty:

$$p \cdot v^n = \text{konst.} \quad (22)$$

Kde n je polytropický exponent, jenž nám umožňuje zápis předchozích rovnic.

➤ Pro $n = 0$ platí:

$$p \cdot v^0 = p = \text{konst}$$

Jak je vidět, dosazením za polytropický exponent $n = 0$ jsme získali rovnici izobary.

➤ Pro $n = 1$

$$p \cdot v^1 = \text{konst} = C_1$$

Po dosazení do stavové rovnice (1) získáme:

$$\begin{aligned} p \cdot v &= r \cdot T \\ T &= \frac{p \cdot v}{r} = \frac{C_1}{r} \end{aligned}$$

Individuální plynová konstanta r je pro případ ideálního plynu konstantou $r = C_2$, získáváme tedy poměr dvou konstant, což je opět konstanta

$$T = \frac{C_1}{C_2} = \text{konst}$$

Pakliže bude polytropickým exponentem hodnota $n = 1$, získáme rovnici izotermy.



- Bude-li $n = \kappa$, získáme celkem logicky rovnici adiabaty

$$p \cdot v^{\kappa} = konst$$

- Dosadíme-li za polytropický exponent nekonečno $n = \infty$:

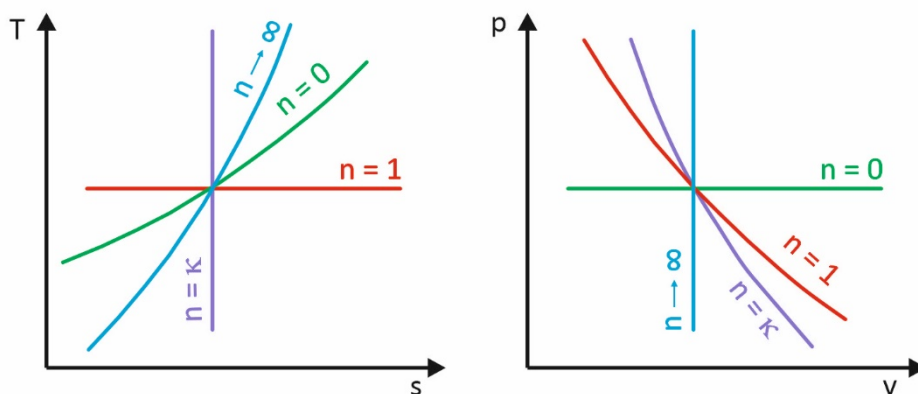
$$p \cdot v^{\infty} = C_1 \quad \left| \sqrt{\quad}^{\infty} \right.$$

$$\sqrt[p]{p} \cdot v = konst \quad \left| \sqrt[p]{x} \dots x \rightarrow 1 \right.$$

$$v = konst$$

Získali jsme poslední vratnou změnu – izochorickou.

Popsané změny můžeme vynést do $p - v$ a $T - s$ diagramu.



Tepelná účinnost cyklu

Tepelná účinnost cyklu je definována jako poměr energie v cyklu využití ku energii do cyklu vložené:

$$\eta_t = \frac{P}{\dot{Q}} \quad (23)$$

kde $P [W]$ je výkon cyklu. Pakliže čitatel i jmenovatel vynásobíme časem (pravou stranu rovnice vynásobíme číslem 1), získáme poměr celkové práce cyklu a celkového tepla do cyklu vloženého

$$\eta_t = \frac{A}{Q}$$

Dalším krokem je dělení členů hmotnostní – získáme poměr měrné práce cyklu a měrného přivedeného tepla

$$\eta_t = \frac{a}{q}$$

Nejčastěji se při výpočtech využívá posledního vztahu, ovšem ještě po úpravě čitatele, což si nyní ukážeme.



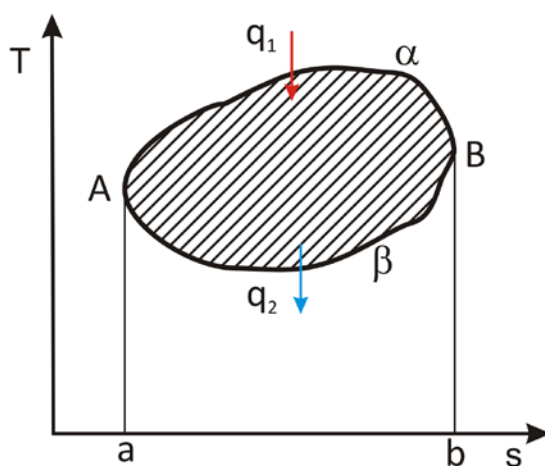
Práce cyklu

První zákon termodynamiky pro libovolný tepelný cyklus lze napsat v následujícím tvaru:

$$\oint dq = \oint du + \oint da \quad (24)$$

Vnitřní energie je stavovou veličinou a její křivkový integrál je tudíž roven nule $\oint du = 0$.

$$\oint dq = \oint da$$



Jak vyplývá z obrázku, změnu tepla můžeme rozdělit na teplo přiváděné $q_1 = q_{pr}$ a teplo odváděné $q_2 = q_{od}$. V našem případě (spalovací turbína) je cyklus realizován ve směru hodinových ručiček, tj. teplo přivádíme z bodu A do bodu B - průběh koresponduje s křivkou α , odvádíme jej pak po křivce β z bodu B do bodu A. Křivkový integrál změny tepla se pak rozpadne na dvě části:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\alpha} dq &= q_1 \\ \int_{\beta} dq &= q_2 \end{aligned} \right\} \oint dq = \int_{\alpha} dq + \int_{\beta} dq = q_1 + q_2$$

Zároveň platí, že

$$\oint da = a$$

Po dosazení zpět do původního vztahu získáme:

$$q_1 + q_2 = a$$

V běžné praxi je zavedeno, že teplo přiváděné má kladnou hodnotu $q_{pr} > 0$, zatímco teplo odváděné má hodnotu zápornou $q_{od} < 0$. Pakliže se budeme držet zaběhlé praxe, pak získáme finální vztah pro práci cyklu v následujícím tvaru:

$$a = q_1 - |q_2| = q_{pr} - |q_{od}|$$

Původní vztah tak získá následující tvar:



$$\eta_t = \frac{q_{pr} - |q_{od}|}{q_{pr}} = 1 - \frac{|q_{od}|}{q_{pr}} \quad (25)$$

Jak již bylo napsáno, tento vztah se používá nejčastěji. V některých případech (např. u tepláren) je však vhodné, a někdy přímo nutné, použít pro výpočet vztah vycházející z definice, tj. poměr energie využití ku energii do systému vložené. Je ovšem nutné zahrnout do výpočtu všechny zařízení, kterých se tok energie přímo dotýká. V případě spalovací turbíny se jedná hlavně o výkon plynové turbíny a příkon kompresoru.

$$\eta_t = \frac{P}{\dot{Q}} = \frac{P^{PT} + P^K}{\dot{Q}_{pr}} \quad (26)$$

Výkon

Výkon zařízení se obvykle počítá jako součin hmotnostního průtoku a technické práce.

$$P = \dot{m} \cdot a_t$$

v takovémto tvaru se ovšem jedná o výkon ideálního zařízení. Pro reálné zařízení je nutné zahrnout do výpočtu také ztráty se zařízením spojené, což si ukážeme např. na plynové turbíně.

$$P^{PT} = \dot{m}_{sk} \cdot a_{t sk}^{PT} \cdot \eta_M \cdot \eta_G$$

Kde

P^{PT}	[W]	výkon plynové turbíny
$\dot{m}_{sk}$	[kg/s]	skutečný hmotnostní průtok
$a_{t sk}^{PT}$	[J/kg]	skutečná technická práce plynové turbíny
η_M	[1]	účinnost mechanická
η_G	[1]	účinnost generátoru

Technická práce

Pro výpočet technické práce vycházíme z prvního zákona termodynamiky (11):

$$dq = dh + da_t$$

Z definice technické práce (10) $da_t = -vdp$ vyplývá, že v případě izobarického děje se změna technické práce rovná nule. V případě spalovací turbíny tedy připadá v úvahu zjišťování technické práce pouze u plynové turbíny a u kompresoru. U těchto zařízení předpokládáme adiabatický děj (expanze a komprese).

$$\int_A^B dq = \int_A^B dh + \int_A^B da_t \quad \left| \int_A^B dq = 0 \right.$$

$$\int_A^B da_t = - \int_A^B dh = \int_B^A dh = \int_B^A c_p \cdot dT$$

$$a_t = c_p \cdot (T_A - T_B) \quad (27)$$



V případě ideálního zařízení, tj. zařízení, kde nevznikají žádné ztráty, se zároveň předpokládá děj izoentropický, což vychází ze druhého zákona termodynamiky pro ideální plyn:

$$ds = \frac{dq}{T} \quad (28)$$

Pro adiabatický děj, kdy $dq = 0$ se tudíž nule musí rovnat i levá strana rovnice $ds = 0$. Chceme-li vypočítat skutečnou technickou práci zařízení, musíme znát termodynamickou účinnost zařízení, která bere v úvahu ztráty vznikající prouděním tekutiny průtočnou částí zařízení.

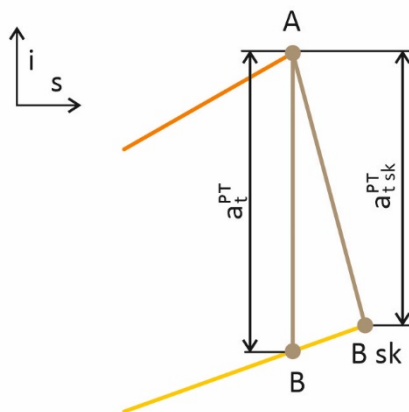
Musíme ovšem rozlišovat motor (např. plynovou nebo parní turbínu) a stroj (kompresor nebo čerpadlo).

Motor - plynová turbína

Pro případ plynové turbíny je termodynamická účinnost vyjádřena:

$$\eta_{td} = \frac{a_{t\ sk}^{PT}}{a_t^{PT}} \quad (29)$$

Jak již bylo napsáno, při řešení úlohy máme obvykle zadanou účinnost zařízení, neznámou jsou pak obě technické práce, tj. teoretická i skutečná. Pro výpočet teoretické měrné technické práce využijeme vztah (27), kde pro ideální plyn platí, že děj adiabatický je zároveň dějem izoentropickým. Pro názornost si vše zobrazíme v $i-s$ diagramu.



$$a_t^{PT} = c_p \cdot (T_A - T_B)$$

Obvykle známe pouze tlak a teplotu na vstupu do turbíny a tlak za turbínu. Pro výpočet teploty za turbínou pak použijeme rovnici adiabaty (21).

$$p_A \cdot v_A^\kappa = p_B \cdot v_B^\kappa$$

Za měrný objem dosadíme stavovou rovnici (1) a vzniklou rovnici upravíme

$$p \cdot v = r \cdot T \rightarrow v = \frac{r \cdot T}{p}$$



$$\begin{aligned}
 p_A \cdot \left(\frac{r \cdot T_A}{p_A} \right)^\kappa &= p_B \cdot \left(\frac{r \cdot T_B}{p_B} \right)^\kappa \\
 \frac{p_A^\kappa}{p_A} \cdot r \cdot T_A &= \frac{p_B^\kappa}{p_B} \cdot r \cdot T_B \\
 p_A^\kappa \cdot p_A^{-1} \cdot T_A &= p_B^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot T_B \\
 T_B &= T_A \cdot \left(\frac{p_A}{p_B} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}
 \end{aligned} \tag{30}$$

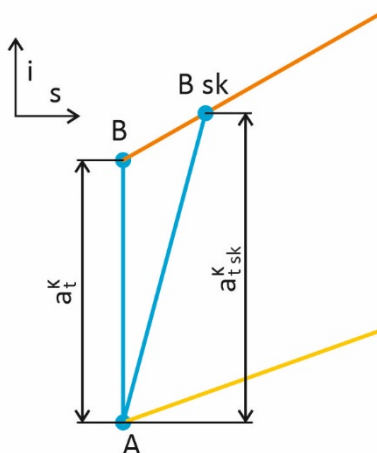
Pomocí termodynamické účinnosti (29) následně dopočítáme skutečnou měrnou technickou práci.

$$a_{t\ sk}^{PT} = c_p \cdot (T_A - T_{B\ sk}) = \eta_{td} \cdot a_t^{PT} = \eta_{td} \cdot c_p \cdot (T_A - T_B)$$

Stroj – kompresor

Postup výpočtu je obdobný jako u motoru, avšak vzhledem k tomu, že skutečná práce je větší než práce teoretická, je ve vztahu pro termodynamickou účinnost prohozen čitatel se jmenovatelem.

$$\eta_{td} = \frac{a_t^K}{a_{t\ sk}^K} \tag{31}$$



$$a_t^K = c_p \cdot (T_A - T_B)$$

$$a_{t\ sk}^K = c_p \cdot (T_A - T_{B\ sk}) = \frac{a_t^K}{\eta_{td}} = \frac{c_p \cdot (T_A - T_B)}{\eta_{td}}$$

Měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku

Při výpočtu tepla a práce, se v případě ideálního plynu s výhodou využívá měrné tepelné kapacity při konstantním tlaku c_p . Jak si nyní ukážeme, její hodnota je závislá pouze na vlastnostech plynu – Poissonově konstantně κ a individuální plynové konstantě r .



Mayerův vztah

Tento vztah ukazuje závislost mezi měrnou teplotou kapacitou při konstantním tlaku a při konstantním objemu a zároveň individuální plynovou konstantou. Výchozí rovnicí je první zákon termodynamiky v prvním tvaru (4)

$$dq = du + da = du + p dv$$

Pro vnitřní energii jsme si již dříve odvodili vztah (19):

$$du = c_v \cdot dT$$

Získáváme tak upravený vztah

$$dq = c_v \cdot dT + p dv$$

Podobně jsme pro izobarický děj získali vztah (18)

$$dq = c_p \cdot dT$$

$$c_p \cdot dT = c_v \cdot dT + p dv$$

Pro stejný děj bychom získali stavovou rovnici v diferenciálním tvaru

$$p dv = r dT$$

$$c_p \cdot dT = c_v \cdot dT + p dv = c_v \cdot dT + r dT$$

Jak je vidět, ve všech třech členech máme změnu teploty. Pakliže celou rovnici derivací teploty podělíme, získáme Mayerův vztah:

$$c_p \cdot dT = c_v \cdot dT + r dT \quad | \cdot \frac{1}{dT}$$

$$c_p = c_v + r \quad (32)$$

Zkombinujeme-li Mayerův vztah a Poissonovu konstantu (20), získáme hledanou měrnou tepelnou kapacitu.

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \rightarrow c_v = \frac{c_p}{\kappa}$$

$$c_p = c_v + r = \frac{c_p}{\kappa} + r \quad | \cdot \kappa$$

$$c_p \cdot \kappa = c_p + r \cdot \kappa$$

$$c_p \cdot (\kappa - 1) = r \cdot \kappa$$

$$c_p = \frac{r \cdot \kappa}{\kappa - 1} \quad (33)$$

Pro vzduch tak dostáváme hodnotu

$$c_p = \frac{287 \cdot 1,4}{1,4 - 1} = 1004,5 \quad \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$$



Měrná tepelná kapacita při konstantním objemu

Postup odvození c_v je obdobný jako v případě c_p

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{c_p}{c_v} \rightarrow c_p = \kappa \cdot c_v \\ c_p &= \kappa \cdot c_v = c_v + r \\ c_v \cdot (\kappa - 1) &= r \\ c_v &= \frac{r}{\kappa - 1} \\ c_v &= \frac{287}{1,4 - 1} = 717,5 \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]\end{aligned}\quad (34)$$

Optimální dělicí tlak

Při řešení optimálního dělicího tlaku hledáme takový tlak, který nám zaručí minimální technickou práci potřebnou pro stlačení vzduchu ve dvoustupňovém kompresoru. Výchozí rovnicí pro nás bude první zákon termodynamiky (11).

$$dq = dh + da_t$$

Předpokládáme adiabatické stlačení, tj. nedochází k výměně tepla s okolím $dq = 0$.

$$\begin{aligned}\int_A^B da_t &= - \int_A^B dh = \int_B^A dh = \int_B^A c_p \cdot dT \\ a_t &= c_p \cdot (T_A - T_B) = \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_A \cdot \left(1 - \frac{T_B}{T_A} \right)\end{aligned}$$

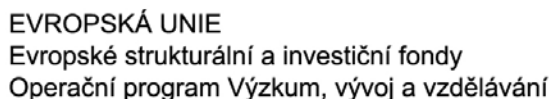
Poměr teplot nahradíme dle vztahu (30) poměrem tlaků:

$$\begin{aligned}\frac{T_B}{T_A} &= \left(\frac{p_A}{p_B} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \\ a_t &= \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_A \cdot \left[1 - \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o dvoustupňový kompresor, je výsledná technická práce dána součtem obou částí kompresoru.

$$a_t = a_t^I + a_t^{II}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{x1} da_t &= \int_{x1}^1 c_p \cdot dT \\ a_t^I &= c_p \cdot (T_1 - T_{x1}) = \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]\end{aligned}$$



$$a_t^H = c_p \cdot (T_{x2} - T_2) = \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_{x2} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_x} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

$$T_1 = T_{x2}$$

$$a_t = a_t^I + a_t^{II} = \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] + \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_x} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

$$a_t = \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \left\{ \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] + \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_x} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \right\}$$

$$a_t = \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \left[2 - \left(\frac{p_x}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_x} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

V dalším kroku určíme samotný dělicí tlak. Jak již bylo řečeno, hledáme takový tlak, který nám zaručí minimální technickou práci potřebnou pro stlačení vzduchu ve dvoustupňovém kompresoru.

$$\frac{\partial a_t}{\partial p_x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial p_x} \left\{ \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \left[2 - \left(\frac{p_x}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_x} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \right\} = 0$$

Parciální derivaci si rozdělíme na tři části a každou z nich nejprve vyřešíme zvlášť.



$$\frac{\partial}{\partial p_x} \left\{ \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot 2 \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_x} \left(-\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot \frac{T_1}{p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \cdot p_x^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) &= -\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot \frac{T_1}{p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \cdot \frac{\partial p_x^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{\partial p_x} = \\ &= -\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot p_x^{\frac{1}{\kappa}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_x} \left(-\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{1}{p_x^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \right) &= -\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{\partial p_x^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}}{\partial p_x} = \\ &= -\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{1 - \kappa}{\kappa} \cdot p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa}} \end{aligned}$$

Dosadíme zpět do původní rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_t}{\partial p_x} &= -\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot p_x^{\frac{1}{\kappa}} - \frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{1 - \kappa}{\kappa} \\ &\quad \cdot p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa}} = 0 \\ -\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \left[p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot p_x^{\frac{1}{\kappa}} + p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{1 - \kappa}{\kappa} \cdot p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa}} \right] &= 0 \\ -\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \left[p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot p_x^{\frac{1}{\kappa}} - p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa}} \right] &= 0 \\ -\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \left[p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot p_x^{\frac{1}{\kappa}} - p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa}} \right] &= 0 \end{aligned}$$

První část rovnice $\left(-\frac{\kappa \cdot r}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right)$ nedosáhne nikdy nulové hodnoty, nebudeme s ní nadále operovat, výsledný vztah se nám výrazně zjednoduší.

$$\begin{aligned} p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot p_x^{\frac{1}{\kappa}} - p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa}} &= 0 \\ p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot p_x^{\frac{1}{\kappa}} &= p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa}} \\ \frac{p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}}{p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} &= \frac{p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa}}}{p_x^{\frac{1}{\kappa}}} \\ p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \cdot p_2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} &= p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa}} \cdot p_x^{\frac{1}{\kappa}} \\ (p_1 \cdot p_2)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} &= p_x^{\frac{1-2\cdot\kappa}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}} = p_x^{\frac{2-2\cdot\kappa}{\kappa}} = p_x^{2 \cdot \frac{1-\kappa}{\kappa}} \\ p_1 \cdot p_2 &= p_x^2 \end{aligned}$$



$$p_x = \sqrt{p_1 \cdot p_2} \quad (35)$$

Získaná rovnice představuje optimální dělicí tlak, při kterém provádíme odvod tepla v případě dělené komprese a přívod tepla pro případ dělené expanze. Je třeba mít na paměti, že tento vztah platí pro ideální plyn a při dodržení podmínky, že teplota ochlazení stlačeného vzduchu je shodná s teplotou vzduchu na vstupu do kompresoru, resp. teplota přihřátých spalin je shodná s teplotou spalin na vstupu do plynové turbíny.

Otázky pro studenty

- Napište stavovou rovnici.
- Nakreslete schéma základního cyklu spalovací turbíny.
- Napište vztah pro termodynamickou účinnost plynové turbíny
- Nakreslete expanzi v plynové turbíně v i - s diagramu a vyznačte v něm teoretickou a skutečnou technickou práci turbíny
- Nakreslete p - v diagram cyklu s dělenou kompresí
- Které parametry ovlivňují velikost hmotnostního průtoku?
- Co ovlivňuje teplotu spalin odváděných do okolí?
- Jaké jsou způsoby zvyšování účinnosti cyklu spalovací turbíny?
- Co je regenerace a jaký je její princip?

Použitá a doporučená literatura

1. Mareš, R.: Kapitoly z termomechaniky, ZČU v Plzni, 2008
2. Kadrnožka, J.: Tepelné elektrárny a teplárny, SNTL, 1984
3. Horlock, J.H.: Advanced Gas Turbine Cycles, Elsevier Science Ltd., 2003, ISBN 0-08-044273-0