

12. Intervalové odhady

V předchozí kapitole jsme odhadovali funkci $\gamma(\Theta)$ parametru Θ hodnotou vhodné statistiky S . Jestliže nahradíme skutečnou hodnotu $\gamma(\Theta)$ jejím odhadem S dopustíme se chyby $S - \gamma(\Theta)$ (tzv. výběrová chyba). Vzhledem k charakteru definice statistiky S je i tato výběrová chyba náhodná veličina. Takovouto náhodnou chybu je možno vyšetřovat (známe – li její rozdělení). Toto šetření je většinou příliš komplikované, proto se zaměřujeme spíše na metodu intervalového odhadu.

Úlohou intervalového odhadu je najít interval (řešíme tedy jednorozměrný případ – parametr je právě jen jeden) , v němž leží hledaná funkce $\gamma(\Theta)$ s předem danou pravděpodobností $1 - \alpha$. O tomto intervalu budeme dále předpokládat, že jeho meze (resp. aspoň jedna mez) jsou závislé na náhodných veličinách (většinou na volené statistice S). V dalším zjednodušíme situaci tak , že funkce $\gamma(\Theta) = \Theta$. Intervaly takto zkonstruované se nazývají většinou intervaly spolehlivosti s koeficientem spolehlivosti $1 - \alpha$ nebo také $100(1 - \alpha)\%$ - ním **intervalem spolehlivosti**. Někdy se dále používá název **konfidenční intervaly**.

12.1 Intervalový odhad – teoretické základy

Budeme tedy v dalším hledat interval

$$A < \Theta < B \quad (12.1)$$

pro který je splněno pro každé Θ z parametrického prostoru

$$P(A < \Theta < B) = 1 - \alpha \quad (12.2)$$

Interval (12.1) budeme nazývat intervalem spolehlivosti. Číslo $1 - \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) budeme nazývat koeficientem spolehlivosti . Tento koeficient můžeme považovat za spolehlivost (pravděpodobnost) tvrzení , že $\Theta \in (A, B)$. Protože ve většině úloh vyžadujeme vysokou pravděpodobnost odhadu, volíme číslo $1 - \alpha$ velmi blízké jedné. Jak ale uvidíme , čím je žádána vyšší pravděpodobnost odhadu , tím je zkonstruovaný interval širší . Proto je vždy nutno volit vhodný kompromis mezi velikostí $1 - \alpha$ a šíří intervalu.

V praxi volíme hodnoty $1 - \alpha$ rovné buď 90% , 95% , 99% nebo 99,5%. Nejčastější volbou je právě 95% - ní interval spolehlivosti.. Je zřejmé , že interval (12.1) není hodnotou $1 - \alpha$ jednoznačně určen (vyplývá většinou z povahy náhodných veličin jak spojitého typu , tak i diskrétního typu – z hlediska obecného jde o plochu dané velikosti, která má obsahovat daný bod , je zřejmé, vzhledem ke spojitosti změn plochy při změnách mezí intervalu, že lze najít více intervalů, které vyhovují (12.1) i (12.2).

Přirozená otázka je najít takový interval, který je pro dané $1 - \alpha$ nejkratší. Ukazuje se , že takovýto interval je určen pomocí následujících pravidel

$$P(\Theta \leq B) = \frac{\alpha}{2} \quad (12.3)$$

$$P(\Theta \geq A) = \frac{\alpha}{2} \quad (12.4)$$

Takto určený interval (A, B) nazveme **dvoustranným intervalem spolehlivosti**. Tento interval je symetrický se středem rovným bodovému odhadu parametru Θ .

Existují úlohy, kdy je přirozené odhadovat parametr Θ pomocí intervalů , které nejsou omezené buď zdola nebo shora . Takovéto intervaly spolehlivosti nazýváme potom

jako jednostranné intervaly spolehlivosti (nebo někdy pravostranné nebo levostranné) intervaly spolehlivosti .

Jejich konstrukci si nyní objasníme . Postupujeme velmi podobně jako v předchozím případě , ovšem vezmeme v úvahu jednostrannou neomezenost konstruovaného intervalu. Tedy

$$P(\Theta \leq B) = 1 - \alpha \quad (12.5)$$

odtud vyvodíme interval $(-\infty, B)$, který nazveme pravostranným intervalem spolehlivosti . Opět tento interval obsahuje bodový odhad parametru Θ , navíc je zdola neomezený.

$$P(\Theta \geq A) = 1 - \alpha \quad (12.6)$$

odtud opět odvodíme interval $(A, +\infty)$. tento interval nazveme levostranným intervalem spolehlivosti . Tento interval obsahuje opět bodový odhad parametru Θ , navíc je shora neomezený.

Při skutečném určování hodnot A a B jako mezí výše uvedených intervalů většinou vycházíme z konstrukce náhodných veličin známých vlastností a pomocí kvantilů těchto veličin odvozujeme právě dané hodnoty A a B . Detailní způsoby si uvedeme v dalších částech této kapitoly.

12.2 Konstrukce intervalových odhadů pro případ normálního rozdělení

Předpokládáme , že náhodný výběr pochází z populace , která je popsána pomocí rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Protože toto rozdělení je jednoznačně určeno dvěma parametry , musíme při konstrukci intervalů spolehlivosti vždy rozlišovat dva případy pro známý či neznámý druhý parametr.

Nejdříve začneme konstrukcí intervalů spolehlivosti pro střední hodnotu μ . Budeme tedy rozlišovat dva případy :

1. Parametr σ^2 je známý . Podle znalostí z předchozích kapitol víme, že náhodná veličina $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, proto je po znormování $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1)$. Můžeme tedy na konstrukci intervalového odhadu použít právě tuto funkci . Budeme dále symbolem u_β označovat β kvantil normovaného normálního rozdělení. Potom je interval

$$\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (12.7)$$

100(1- α)% - ním oboustranným intervalem spolehlivosti . Hodnota $\bar{x}$ nyní i dále je realizace náhodné veličiny $\bar{X}$ pomocí náhodného výběru.

Podobně nyní odvoďme i jednostranné intervaly spolehlivosti. Pravostranný

$$-\infty < \mu < \bar{x} + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (12.8)$$

a levostranný

$$\bar{x} - u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < +\infty \quad (12.9)$$

Na základě takto stanovených intervalů spolehlivosti spočteme několik příkladů.

Příklad 12.1

Nechť jsou dána data z populace typu normální rozdělení s $\sigma^2 = 3$. Data jsou uvedena v následující tabulce :

X	2	3	4	5	6	7	8	9
četnost	1	3	3	8	9	6	5	2

Stanovíme nejprve hodnotu bodového odhadu střední hodnoty, ta je rovna $\bar{x} \doteq 5,8649$, dále stanovíme hodnotu $n = 39$. V dalším zjistíme hodnoty nejprve oboustranných intervalů spolehlivosti pro různé hodnoty α , výsledky uvedeme v tabulce

$1 - \alpha$	A	B
0,95	5,31	6,42
0,96	5,28	6,45
0,99	5,13	6,60
0,995	5,07	6,66

Podobně do stejné tabulky vložíme hodnoty mezi pro jednostranné a jednostranné intervaly spolehlivosti

levostranný interval	
$1 - \alpha$	A
0,9	5,50
0,95	5,40
0,99	5,20
0,995	5,13

pravostranný interval	
$1 - \alpha$	B
0,9	6,23
0,95	6,33
0,99	6,53
0,995	6,60

2. Parametr σ^2 není známý.

Potom je opět z předchozích kapitol známo, že náhodná veličina $\frac{\bar{X} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n}$ je typu studentova rozdělení s $n-1$ stupni volnosti - $t(n-1)$. Odtud již můžeme opět provést konstrukci jednotlivých typů intervalů spolehlivosti. Tedy

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (12.10)$$

je oboustranný **100(1- α)% - ní interval spolehlivosti**. Dále

$$-\infty < \mu < \bar{x} + t_{1-\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (12.11)$$

je **pravostranným 100(1- α)% intervalem spolehlivosti** a

$$\bar{x} - t_{1-\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < +\infty \quad (12.12)$$

je **levostranným 100(1- α)% intervalem spolehlivosti**. Hodnoty t_{β} jsou příslušné kvantily studentova rozdělení s $(n-1)$ stupni volnosti. Podotkněme, že pro hodnoty $n > 35$ většinou provádíme náhradu studentova rozdělení normálním normovaným. Jistě můžeme tuto náhradu provést vždy pro $n > 100$.

Příklad 12.2

Nechť máme nyní dány stejné hodnoty jako v předchozím příkladu s tím, že nemáme informaci o velikosti rozptylu σ^2 populace. Potom musíme příslušné hodnoty daných intervalů spočítat přímo ze vztahů (12.10) – (12.12). Výsledky se opět budeme snažit zobrazit přímo v tabulkách, samostatně pro oboustranný interval spolehlivosti a pro jednostranné intervaly.

$1 - \alpha$	A	B
0,95	5,20	6,53
0,96	5,18	6,55
0,99	5,02	6,71
0,995	4,95	6,78

levostranný interval	
$1-\alpha$	A
0,9	5,29
0,95	5,10
0,99	5,861
0,995	5,02

pravostranný interval	
$1-\alpha$	B
0,9	6,44
0,95	6,63
0,99	5,868
0,995	6,71

V druhé části tohoto oddílu ukážeme konstrukci intervalu spolehlivosti pro směrodatnou odchylku σ . Budeme opět vycházet z předpokladu, že populace je popsána jako normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Budeme opět rozlišovat dva případy:

1. Střední hodnota μ je známa. Potom využijeme vztahu (10.6) tzv. výběrového rozptylu při známé střední hodnotě μ . Tuto statistiku je možno použít k bodovému odhadu σ^2 . Podle konstrukce obecných rozdělení je zřejmé, že $\frac{n \cdot s_0^2}{\sigma^2}$ je typově rozdělení χ^2 s n stupni volnostmi. Pro ověření tuto náhodnou veličinu napište jako součet nezávislých náhodných veličin typu $(N(0,1))^2$. Tuto znalost nyní využijeme nejdříve pro konstrukci oboustranného $100(1-\alpha)\%$ -ního intervalu spolehlivosti:

$$\frac{n \cdot s_0^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma^2 < \frac{n \cdot s_0^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} \quad (12.13)$$

Podobně provedeme konstrukci intervalu pravostranného

$$0 < \sigma^2 < \frac{n \cdot s_0^2}{\chi_{\alpha}^2} \quad (12.14)$$

a levostranného

$$\frac{n \cdot s_0^2}{\chi_{1-\alpha}^2} < \sigma^2 < +\infty \quad (12.15).$$

Hodnoty χ^2_β je hodnota kvantilu β rozdělení χ^2 o n stupních volnosti. Je nutno ovšem upozornit, že případy kdy známe střední hodnotu populace a neznáme naopak rozptyl populace se v reálné praxi prakticky vůbec nevyskytují, proto je nebudeme dále brát v úvahu.

2. Střední hodnota μ není známa. Populace je však popsána jako rozdělení typu $N(\mu, \sigma^2)$. K bodovému odhadu hodnoty σ^2 používáme podle předchozí kapitoly statistiku s , která je definována v předchozí kapitole vztahem (10.7). Pokud provedeme úpravu náhodné veličiny s na $\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}$ získáme náhodnou veličinu typu χ^2 o $n-1$ stupních volnosti.

Na základě znalosti tohoto rozdělení je tedy možno provést konstrukci všech typů intervalů spolehlivosti. Nejdříve tedy odvodíme **oboustranný 100(1- α)% - ní interval spolehlivosti** (opět jako v předchozích vztazích bude χ^2_β hodnota kvantilu β rozdělení χ^2 tentokrát o $n-1$ stupních volnosti):

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \quad (12.16)$$

Podobně odvodíme také **pravostranný interval spolehlivosti** jako

$$0 < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{\alpha}} \quad (12.17)$$

a **levostranný interval spolehlivosti**

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha}} < \sigma^2 < +\infty \quad (12.18)$$

Příklad 12.3

Provedli jsme náhodný výběr z populace $N(\mu, \sigma^2)$, hodnota $n = 20$, dále jsme zjistili hodnotu $s = 0,1$. Sestrojme 95% oboustranný interval spolehlivosti pro rozptyl.

Řešení:

Protože neznáme střední hodnotu μ použijeme vzorce (12.16). Zjistíme nejdříve dané hodnoty, které potřebujeme pro stanovení vztahu (12.16). Tedy:

$$S^2 = 0,121 \quad ; \quad \chi^2_{0,025} = 8,91 \quad ; \quad \chi^2_{0,975} = 32,9 \quad ; \quad n-1 = 19, \text{ po dosazení do vzorce}$$

$$0,006 < \sigma^2 < 0,021 \quad \text{neboli} \quad 0,07746 < \sigma < 0,144914.$$

V našem případě se snažíme naměřená data diskrétního charakteru převést na model spojitý, velmi často za podmínky použití odmocniny z konečnostního násobitele viz věta 11.7, tedy za podmínky, že $\frac{n}{N} \leq 0,05$ provedeme úpravy výrazů (12.7) až (12.12) tak, že je

násobíme $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$. Této úpravě se někdy říká také **oprava na výběr bez vracení**. Například výraz (12.10) s danou opravou je

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (12.10').$$

12.3 Konstrukce intervalových odhadů pro případ binomického (alternativního) rozdělení

Předpokládejme, že náhodný výběr pochází z populace popsané alternativním rozdělením s neznámým parametrem π . Jak jsme již odvodili v předchozí kapitole je

nejlepším nezkresleným odhadem parametru π výběrová relativní četnost $p = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$,

navíc výběrový úhrn $m = \sum_{i=1}^n X_i = \frac{k}{n}$ má rozdělení $Bi(n; \pi)$.

Je zřejmé, že pro sestavení intervalu spolehlivosti se nejlépe hodí funkce

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \pi^i (1-\pi)^{n-i} \quad (12.18)$$

Obecně je tato distribuční funkce binomického rozdělení dosti komplikovaná, naštěstí existuje určitý zajímavý vztah mezi distribuční funkcí Fischer – Snedecorova rozdělení a distribuční funkcí rozdělení binomického.

Meze oboustranného intervalu spolehlivosti $\bar{\pi}$ a $\underline{\pi}$ jsou dány vztahy

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \bar{\pi}^i (1-\bar{\pi})^{n-i} = \frac{\alpha}{2} \quad (12.19)$$

$$\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \underline{\pi}^i (1-\underline{\pi})^{n-i} = \frac{\alpha}{2} \quad (12.20)$$

Vztah mezi distribučními funkcemi je následující

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \pi^i (1-\pi)^{n-i} = P\left(F < \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{1-\pi}{\pi}\right) \quad (12.21),$$

kde F je $F(2.(n-k); 2.(k+1))$ -rozdělení, jde tedy o Fischer – Snedecorovo rozdělení s $2.(n-k)$ a $2.(k+1)$ stupni volnosti. Využijeme – li nyní vztahu (12.21) získáme

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \bar{\pi}^i (1-\bar{\pi})^{n-i} = \frac{\alpha}{2} = P\left(F < \frac{k+1}{n-k} \cdot \frac{1-\bar{\pi}}{\bar{\pi}}\right) \quad (12.22)$$

Odtud získáme **horní mez**

$$\bar{\pi} = \frac{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(k+1)}{n-k + (k+1) \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}}} \quad (12.23)$$

Symbol F_{β} označujeme příslušný kvantil rozdělení F s $2.(k+1)$; $2.(n-k)$ stupni volnosti. Podobně upravíme (12.20) a získáme

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \underline{\pi}^i (1-\underline{\pi})^{n-i} = P\left(F < \frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{1-\underline{\pi}}{\underline{\pi}}\right) \quad (12.24)$$

Tedy **dolní mez odhadu** je

$$\underline{\pi} = \frac{k}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-k+1) + k} \quad (12.25)$$

Symbolem F_{β} označujeme příslušný kvantil rozdělení F s $2(n-k+1)$; $2k$ stupni volnosti .

Příklad 12.4

Při kontrole jakosti bylo z velké série vyrobených televizorů vybráno náhodně $n = 400$ výrobků , z toho bylo 25 vadných . Sestrojte oboustranný 95% interval spolehlivosti pro podíl vadných výrobků v sérii všech vyrobených!

Řešení .

Použijeme výše uvedené hodnoty (12.23) a (12.25) , v kterých dosadíme $k = 25$ a $n=400$. Po dosazení získáme hodnoty **(0,044; 0,086)** .

Ve většině případů můžeme přisoupit k vyšetřování intervalových odhadů alternativního rozdělení (binomického rozdělení) jinak. Označíme – li symbolem $p = \frac{k}{n}$, bodový odhad hledané pravděpodobnosti π , potom je (pro dostatečně velká n ($n > 30$))

$$\frac{\pi - p}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}} \sim N(0,1). \quad (12.26)$$

Nepříjemné je , že jmenovatel v (12.26) závisí na odhadované hodnotě. Tuto závadu odstraníme , nahradíme – li pro tento případ π jeho bodovým odhadem. Celkově tedy bude intervalový odhad roven:

$$p - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} < \pi < p + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \quad (12.27)$$

Podotkněme, že tento odhad budeme akceptovat , jestliže hodnota

$$n > \frac{9}{p \cdot (1-p)} \quad (12.28)$$

dále budeme předpokládat , že $n > 30$. Ve výrazu (12.27) provádíme velmi často tzv. **korekci na spojitost** (nahrazujeme diskrétní rozdělení spojitým), tím získáme nový odhad

$$p - \frac{1}{2n} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} < \pi < p + \frac{1}{2n} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \quad (12.29).$$

Všechny předchozí úvahy jsme prováděli za jednoho podstatného předpokladu, poměr vybíraných výrobků z celé série je maximálně **5%** nebo jinak $\frac{n}{N} \leq 0,05$, kde n je počet vybíraných výrobků a N je celkový počet výrobků.

Je – li tento předpoklad porušen, musíme upravit navíc také vztahy (12.27) resp. (12.29) , tím , že použijeme **konečnostní koeficient** . Potom budou tedy tyto odhady následující

$$p - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \pi < p + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (12.30)$$

a

$$p - \frac{1}{2n} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \pi < p + \frac{1}{2n} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (12.31)$$

Pomocí našich nových vztahů provedeme opět zjištění hodnot intervalových odhadů pro příklad 12.4. Protože byl výběr učiněn z velké série , předpokládáme, že hodnota $\frac{n}{N} \leq 0,05$. Budeme tedy používat vztahy (12.27) a (12.29). Platí vztah (12.28) neboť $n = 400$. Tedy nové intervalové odhady jsou **(0,039;0,086)** , s korekcí na spojitost **(0,037;0,087)**.

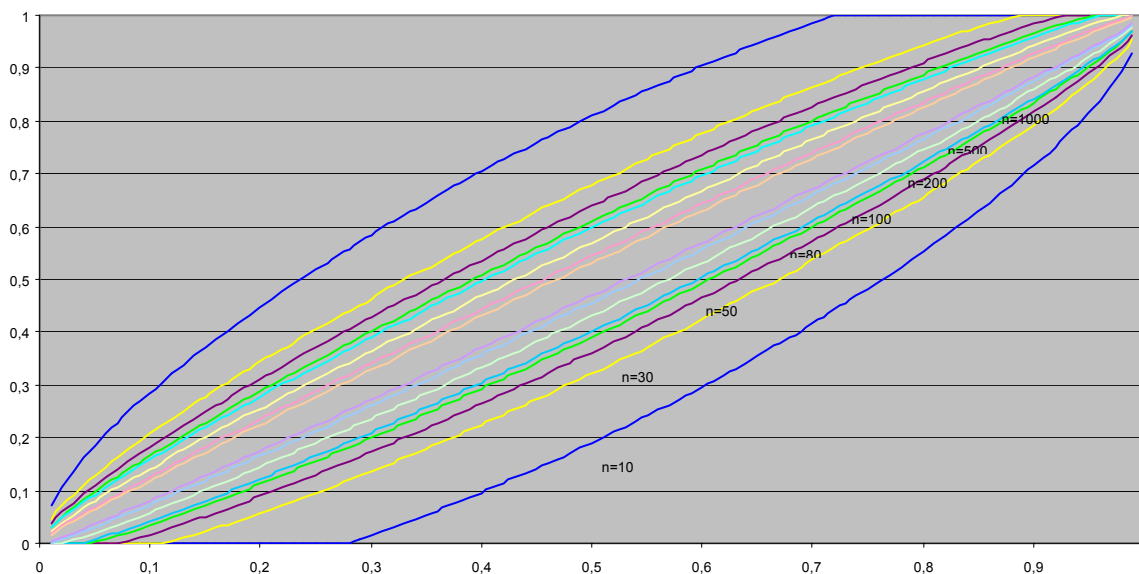
Všimněme si, že na rozdíl od intervalových odhadů střední hodnoty pro normální rozdělení neleží bodový odhad pravděpodobnosti π ve středu intervalového odhadu!

Příklad 12.5

Použijeme upravený příklad 12.4. Změníme data tak, že výběr $n=400$ výrobků provádíme z celkem $N=4000$ výrobků.

Nyní bude odhad převodem na normální rozdělení roven **(0,040 ; 0,085)** . Odhad s korekcí na spojitost bude činit celkem **(0,039; 0,086)**.

Uvedené příklady je možno také řešit pomocí speciálního statistického grafu , který je konstruován právě pomocí výše uvedených principů a je uveden dále



Konstrukce je provedena pro 95% intervaly spolehlivosti pro různé hodnoty výběrových podílů (jsou uváděny na ose x) , příslušný interval získáme tak , že zvolíme

hodnotu n , dále na ose x označíme nalezený výběrový podíl, vztyčíme kolmici a uvedené průsečíky s danými grafy vyznačí hledaný interval.

Bližší jsou uvedené intervaly vypočítány v následující tabulce (vše počítáno pro interval spolehlivosti 95%).

12.4 Konstrukce intervalových odhadů pro případ Exponenciálního rozdělení

Při konstrukci intervalových odhadů pro tento typ rozdělení budeme důsledně vycházet z následujícího tvrzení.

Věta 12.6

Nechť náhodný výběr pochází z populace popsané pomocí exponenciálního rozdělení s parametry 0 a δ potom je náhodná veličina

$$\frac{2.n.\bar{X}}{\delta} \quad (12.32)$$

rozdělení $\chi^2(2.n)$ (tedy chi –kvadrát s $2n$ stupni volnosti).

Větu dokazovat nebudeme, odkazujeme např. na .

Pomocí tohoto tvrzení je možno sestrojit oboustranný $(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti parametru δ podle následujícího vztahu

$$\frac{2.n.\bar{x}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \delta < \frac{2.n.\bar{x}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \quad (12.33),$$

kde $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ a $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ jsou příslušné kvantily rozdělení chi kvadrát s $2.n$ stupni volnosti .

Je – li hodnota prvního parametru A exponenciálního rozdělení X různá od nuly, nahradíme ji náhodnou veličinou $X - A$, která je opět exponenciální a navíc má vlastnosti obsažené ve větě 12.6.

Podobným způsobem můžeme provést i konstrukce jednostranných či pravostranných intervalů spolehlivosti.

Uvedené skutečnosti budeme ilustrovat na konkrétním příkladě.

Příklad 12.7

Doba čekání ve frontě má exponenciální rozdělení s parametrem $A = 5$ minut . Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro parametr δ , jestliže součet dob čekání náhodně vybraných 10 klientů byl roven 100 minut.

Řešení :

Nejdříve zjistíme hodnotu $\bar{x}$, protože hodnota $A = 5$ je různá od nuly budeme muset nejdříve provést posun parametrů. Tedy $\bar{x} = \frac{100-10.5}{10} = \frac{50}{10} = 5$, nyní již můžeme dosadit do intervalového odhadu (12.33).

$$\frac{2.10.5}{34,2} < \delta < \frac{2.10.5}{9.59} \Leftrightarrow 2,92 < \delta < 10,43.$$

Podobně bychom mohli konstruovat intervaly spolehlivosti pro další typy rozdělení např. Poissonovo rozdělení, hypergeometrické a další, pro detaily odkazujeme na .

12.5 Intervaly spolehlivosti pro rozdíl dvou středních hodnot

V další části této kapitoly se budeme zabývat případy dvou nezávislých výběrů a budeme především nalézat intervaly spolehlivosti pro jejich rozdíl. Nejdříve začneme nejjednoduššími případy .

12.5.1 Rozptyl hledaných populací je známý a populace jsou normální

Předpokládejme, že jsou známy rozptyly daných populací. Tento případ je v praxi prakticky vyloučen, přesto ho budeme diskutovat. Známe tedy hodnoty σ_1^2 a σ_2^2 . Podle předchozí kapitoly jsou tedy náhodné veličiny

$\frac{\bar{X}_1 - \mu_1}{\sigma_1} \cdot \sqrt{n_1} \sim N(0,1)$ a $\frac{\bar{X}_2 - \mu_2}{\sigma_2} \cdot \sqrt{n_2} \sim N(0,1)$. V tomto okamžiku nás ale zajímá odhad rozdílu neznámých středních hodnot, proto uvedené vztahy přepočteme takto:

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad (12.34).$$

Z takového vztahu již můžeme provést konstrukci např. oboustranných $(1-\alpha)\%$ intervalů spolehlivosti jako:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (12.35),$$

kde jako obvykle symbol u_α znamená α - tý kvantil rozdělení $N(0,1)$. Podobně bychom mohli odvodit i vztahy pro jednostranné odhady rozdílu středních hodnot.

12.5.2 Rozptyl hledaných populací je neznámý a populace jsou normální

Nejdříve budeme studovat případ, kdy rozptyl z neznámých populací je sice neznámý, ale je stejný a roven σ^2 . Potom použijeme podobné kroky jako při konstrukci studentova rozdělení. Budeme opět předpokládat, že chceme zkonstruovat $(1-\alpha)\%$ oboustranný interval spolehlivosti. Totiž náhodná veličina (12.36) je typu studentovo rozdělení s $(n_1 + n_2 - 2)$ stupni volnosti

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2} \quad (12.36)$$

Z tohoto vztahu již můžeme snadno odvodit všechny typy intervalových odhadů, je zřejmé, že budou záviset mimo jiné na kvantilech studentova rozdělení. První odmocnina ve výrazu (12.36) se někdy označuje jako s_p .

Z uvedeného postupu vyplývá, že je nutné ověřit rovnost obou rozptylů. V případě, kdy se totiž tyto rozptyly nerovnají, neplatí ani (12.36). Naštěstí existuje možnost jak ověřit rovnost rozptylů u dvou náhodných výběrů. K tomuto ověření používáme Fischer – Snedecorovo rozdělení.

Podle tvrzení uvedených v kapitole 2. totiž platí:

$$F = \frac{\frac{A_1}{n_1}}{\frac{A_2}{n_2}} \sim F(n_1, n_2), \text{ jsou – li } A_1 \text{ a } A_2 \text{ nezávislé náhodné veličiny postupně typu}$$

$\chi^2(n_1)$ a $\chi^2(n_2)$. Zvolíme – li za uvedené náhodné veličiny A_1 a A_2 , hodnoty výběrových rozptylů, které jsou typu chi kvadrát získáme:

$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \quad (12.37),$$

je tedy Fischer – Snedecorovo rozdělení s $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ stupni volnosti. Tyto vztahy jsou odvozeny za předpokladu, že rozptyly obou populací jsou shodné.

Jestliže chceme ověřit rovnost dvou rozptylů, využijeme vztah (12.37), provedeme – li intervalový odhad na hladině významnosti $(1-\alpha)\%$, musí tento interval obsahovat číslo 1. Nebude – li ho obsahovat, nemůžeme rovnost rozptylů potvrdit.

V tomto případě nebo v případě, že z jiných informací máme potvrzenu nerovnost obou rozptylů, pak použijeme metodu s redukovanými stupni volnosti. Náhodná veličina

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_r \quad (12.38)$$

kde počet stupňů volnosti r spočteme podle následujícího předpisu (Welchův způsob)

$$r = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 + 1}} - 2 \quad (12.39),$$

v případě, že daná hodnota r není celé číslo, zaokrouhlíme ji nahoru k nejbližšímu celému číslu.

Ve všech případech, které jsme vyšetřovali v této části po využití vztahů (12.36) a (12.38) přejdeme postupně k oboustrannému intervalovému odhadu

$$\begin{aligned}
& (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{(n_1-1) \cdot s_1^2 + (n_2-1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < \\
& < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{(n_1-1) \cdot s_1^2 + (n_2-1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}
\end{aligned} \quad (12.40),$$

pro případ vztahu (12.36) a rovnosti rozptylů, t je studentovo rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti.

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \quad (12.41)$$

pro případ vztahu (12.38), kdy nemáme zaručenou rovnost rozptylů populací, t je studentovo rozdělení s redukovaným počtem stupňů volnosti podle (12.39).

12.5.3 Populace jsou popsány jako alternativní (binomické) rozdělení

Podobně jako v části 12.3 můžeme odvodit velmi podobné vzorce jako jsou (12.27) a (12.29). Bez opravy na spojitost (nutno podržet platnost vztahu (12.28) pro oba výběry) je takový odhad roven

$$\begin{aligned}
& p_1 - p_2 - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 < \\
& < p_1 - p_2 + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_2}}
\end{aligned} \quad (12.42)$$

Pro případ korekce (opravy) na spojitost se používají následující vztahy

$$\begin{aligned}
& p_1 - p_2 - \frac{1}{2 \cdot n_1} - \frac{1}{2 \cdot n_2} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 < \\
& < p_1 - p_2 + \frac{1}{2 \cdot n_1} + \frac{1}{2 \cdot n_2} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_2}}
\end{aligned} \quad (12.43)$$

12.6 Konstrukce intervalových odhadů na základě velkých výběrů

Při konstrukci takovýchto intervalových odhadů, kdy není předem známo rozdělení populace, je možno u velkých náhodných výběrů vyjít z centrální limitní věty. Předpokládáme, že rozdělení populace má konečnou střední hodnotu $E(X) = \mu$ a konečný rozptyl $VAR(X) = \sigma^2$. Potom můžeme považovat rozdělení

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (12.44)$$

asymptoticky za $N(0,1)$. Odtud tedy , pokud známe hodnotu směrodatné odchylky použijeme tento vztah. Pokud neznáme hodnotu σ nahradíme ji v předchozím vztahu konzistentním odhadem tohoto parametru např. hodnotou s . Potom máme tedy příslušné intervalové odhady rovný

$$\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (12.45)$$

a

$$\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (12.46)$$

V této a předchozí kapitole jsme se zabývali především oboustrannými intervalovými odhady , tvorba jednostranných odhadů probíhá stejným způsobem jako v části 12.2.

12.7 Metoda bootstrap

Jde o mnoho násobné využití simulace náhodných výběrů z množiny náhodných výběrů. Předpokládejme , že jsme provedli náhodný výběr z populace , o níž nemáme žádné informace. Tento výběr je složen z prvků $x_1, \dots, x_n$. Jako první krok provedeme pomocí generátoru náhodných čísel mnohonásobný výběr z této množiny o několika desítek tisíc prvků (nebo více) . Tím získáme dočasnou množinu **M** . Z této množiny budeme metodou Monte Carlo vybírat konstantní počet prvků (např. 10) a počítat jejich průměr (je to bodový odhad skutečné střední hodnoty) . Takovéto hodnoty soustředíme v další množině **T** . Z této množiny můžeme potom vytvářet obrazy intervalových odhadů pomocí popisu rozložení prvků v **T** , na základě relativní četnosti.

Příklad 12.8

Níže uvedená data byla vybrána z populace .

4	5	4,3	5,2	6	5,5	4,8	4,2	4,3	7,5	4,6	4,5	5,2	5,3	5,2	5,1	6	5
---	---	-----	-----	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---	---

Provedli jsme 26 000 výběrů z této 18 – ti členné množiny . Tím jsme získali 26 000 reprezentantů . Z nich jsme metodou Monte Carlo vybrali náhodně vždy 10 prvků a z nich jsme spočítali hodnotu průměru (jde o bodový odhad střední hodnoty) . Tuto metodu jsme mnohokrát opakovali a získáme hodnoty , které můžeme zobrazit v histogramu nebo z nich získat intervalový odhad na dané hladině významnosti.

Zpracovaná tabulka údajů, u hodnot a , b jsou uvedeny intervalové odhady provedené pomocí (12.46) , hladina významnosti je uvedena u buňky α . V dalších sloupcích jsou zobrazeny postupně nalezené hodnoty , jejich četnosti , kumulativní četnosti a relativní kumulativní četnosti . Barevný proužek vpravo popisuje intervalový odhad na dané hladině významnosti .

alfa= 0,05

	4,2	0	0	0
	4,3	0	0	0
	4,4	6	6	0,000231
	4,5	58	64	0,002462
a= 5,505749	4,6	248	312	0,012
	4,7	837	1149	0,044192
b= 4,68314	4,8	1873	3022	0,116231
	4,9	3058	6080	0,233846
	5	3889	9969	0,383423
	5,1	4119	14088	0,541846
	5,2	3733	17821	0,685423
	5,3	2946	20767	0,798731
	5,4	2115	22882	0,880077
	5,5	1379	24261	0,933115
	5,6	846	25107	0,965654
	5,7	445	25552	0,982769
	5,8	240	25792	0,992
	5,9	121	25913	0,996654
	6	54	25967	0,998731
	6,1	23	25990	0,999615
	6,2	10	26000	1

Níže je sestrojen z uvedených údajů graf , který popisuje výše uvedený intervalový odhad.

