

## 17. Statistické hypotézy – parametrické testy

V této části se budeme zabývat statistickými hypotézami, pomocí vyšetřujeme jednotlivé parametry populace. K takovýmto šetřením většinou využíváme nám již dobře známé statistické intervalové odhady.

### 17.1 Testy o parametrech normálního rozdělení

V této části se budeme zabývat studiem případů, kdy testujeme základní parametry rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ . Konkrétně budeme konstruovat testy pro střední hodnotu a rozptyl takového náhodné veličiny.

#### 17.1.1 Střední hodnota $\mu$

Na základě náhodného výběru  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ , které pochází z populace popsané rozdělením  $N(\mu, \sigma^2)$  budeme testovat hypotézu  $H_0: \mu = \mu_0$ ,  $\mu_0$  je předem zadané reálné číslo.

Z kapitoly o intervalových odhadech víme, že základem všech konstrukcí odhadů střední hodnoty bývá výběrový průměr  $\bar{X}$  a jeho vlastnosti. Právě z vlastností výběrového průměru jsme konstruovali intervalové odhady a z těchto vlastností nyní odvodíme příslušné testové statistiky pro konkrétní alternativní statistické hypotézy  $H_1$ . Protože jsme při tvorbě intervalových odhadů rozlišovali případ zda je nám znám rozptyl rozdělení provedeme takového rozdělení i nyní.

##### 17.1.1.1 Parametr $\sigma^2$ je znám

V tomto případě použijeme jako testovací statistiku rozdělení

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}, \quad (17.1)$$

o kterém je známo, že při platnosti hypotézy  $H_0$  je typu  $N(0,1)$ .

Budeme – li tedy vyšetřovat nejdříve případ **pravostranné alternativní hypotézy** tedy:  $H_1: \mu > \mu_0$  na hladině významnosti  $p$  získáme kritický obor  $\mathcal{W} = \{u; u \geq u_{1-p}\}$ , kde  $u_\alpha$  je  $\alpha$  % kvantil rozdělení  $N(0,1)$  a  $u$  je vypočtená hodnota testové statistiky.

V případě **levostranné alternativní hypotézy**  $H_1: \mu < \mu_0$  s použitím stejné testovací statistiky na hladině významnosti  $p$  získáme kritický obor  $\mathcal{W} = \{u; u \leq u_{1-p}\}$ .

V posledním případě **oboustranné alternativní hypotézy**  $H_1: \mu \neq \mu_0$ , s použitím stejné testovací statistiky získáme na hladině významnosti  $p$  kritický obor  $\mathcal{W} = \left\{u; |u| \geq u_{\frac{1-p}{2}}\right\}$ , kde opět  $u_\alpha$  je  $\alpha$ % kvantil rozdělení  $N(0,1)$  a  $u$  je opět vypočtená hodnota testové statistiky.

Dále uvedeme několik modelových příkladů k presentaci postupů a ke stanovení silofunkce těchto hypotéz.

#### Příklad 17.1

Byl proveden náhodný výběr o rozsahu  $n=5$  prvků z populace  $N(\mu, 10)$ . Testujme hypotézu  $H_0: \mu = 8$  proti alternativní hypotéze  $H_1: \mu \neq 8$  na hladině významnosti 5%.

Pomocí náhodného výběru byl nalezen výběrový průměr  $\bar{X} = 8,8$ . Rozhodněte o platnosti hypotézy  $H_0$ !

**Řešení:**

Vzhledem k hladině významnosti, je stanoven kritický obor  $\mathcal{W} = \{u; |u| \geq 1,96\}$ .

Stanovíme hodnotu testové statistiky pro náš případ  $u = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{8,88 - 8}{2} \cdot \sqrt{5} = 0,984$ .

Protože hodnota testové statistiky není v kritickém oboru nemůžeme hypotézu  $H_0$  zamítnout. Hodnota silofunkce je v tomto případě rovna :

$$1 - \beta(\mu) = \Phi\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} + u_{\frac{p}{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} + u_{\frac{p}{2}}\right). \text{ Pro jednotlivé hodnoty } \mu_0$$

vypočteme hodnotu  $\beta$ , v následující tabulce jsou tyto hodnoty uvedeny:

| $\mu_0$ | $\beta(\mu_0)$ |
|---------|----------------|
| 5       | 0,676958       |
| 6       | 0,829925       |
| 7       | 0,920902       |
| 8       | 0,95           |
| 9       | 0,920902       |
| 10      | 0,829925       |
| 11      | 0,676958       |
| 12      | 0,483994       |
| 13      | 0,294582       |
| 14      | 0,149161       |
| 15      | 0,061776       |

Samozřejmě, že pro hodnotu  $\mu_0 = 8$  je hodnota  $\beta$  rovna 95%, celkově je vidět, že hodnoty chyby druhého druhu jsou pro stávající hodnoty velmi nepříznivé, s rostoucí vzdáleností od testované hodnoty  $\beta$  klesá. Jednoznačným viníkem těchto výsledků je malý počet členů výběru.

**Příklad 17.2**

Výrobce tvrdí, že výrobek má rozměry 56,2 jednotky se směrodatnou odchylkou 2,2 jednotky. Odběratel tvrdí, že rozměry jsou větší, proto nechal přeměřit 70 náhodně vybraných výrobků a zjistil, že jejich průměrný rozměr byl 58,9 jednotek. Je tato hodnota výběrového průměru, za předpokladu normálního rozdělení a směrodatné odchylky rozměrů 2,2 jednotky, statisticky významně větší než tvrdí výrobce? Řešení proveďte na hladině významnosti 1%.

**Řešení:**

Stanovme nejdříve základní hypotézy:  $H_0 : \mu \leq 56,2$  a  $H_1 : \mu > 56,2$ . Testová statistika je i v tomto případě stejná, zjistíme tedy její hodnoty –

$$u = \frac{58,9 - 56,2}{2,2} \cdot \sqrt{70} = \frac{2,7}{2,2} \cdot 8,37 = 10,27$$

V tomto případě je kritický obor  $\mathcal{W} = \{u; u \geq 2,326\}$ , protože vypočítaná hodnota se nachází v kritickém oboru na hladině významnosti zamítáme hypotézu  $H_0$ , výrobky jsou tedy statisticky významně větší než tvrdí výrobce.

### 17.1.1.2 Parametr $\sigma^2$ je neznámý

Při praktických úlohách se ve většině případů setkáváme spíše s případem, kdy hodnoty parametru  $\sigma$  nejsou známy a můžeme z naměřených údajů je odhadovat jeho skutečnou hodnotu. V tomto případě (již na základě našich znalostí z části bodového odhadu) se jako testová statistika volí náhodná veličina

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} \quad (17.2)$$

o které již z dřívějších kapitol víme, že je typu studentova rozdělení s  $n-1$  stupni volnosti. Takováto veličina se v souladu s tradicí označuje písmenkem **t**. Výraz **s** je klasická hodnota statistického rozptylu.

Vypišme nyní kritické obory pro jednotlivé případy jednostranných resp. oboustranných hypotéz:

**Pravostranná alternativní hypotéza  $\mu > \mu_0$**

$\mathcal{W} = \{t; t \geq t_{1-p}\}$ , hodnota  $t_{1-p}$  je rovna  $(1-p)\%$  kvantilu studentova rozdělení s  $(n-1)$  stupni volnosti.

**Levostranná alternativní hypotéza  $\mu < \mu_0$**

$\mathcal{W} = \{t; t \leq t_p\}$ , při stejném označení.

**Oboustranná alternativní hypotéza  $\mu \neq \mu_0$**

$\mathcal{W} = \left\{t; |t| \geq t_{1-\frac{p}{2}}\right\}$ , značení jako v předchozím.

Poznamenejme, že stejně jako v první části je jedním z podstatných předpokladů to, že daná data jsou získávána z populace normální a způsob výběru je náhodný!

#### Příklad 17.3

Na základě náhodného měření jsme zjistili následující hodnoty 6;9;10;10;11;12;12;13;14;14;14;14;15;16;16;17. Zjistěte, zda můžeme na hladině významnosti 5% rozhodnout o tom, že střední hodnota populace nerovná 15.

#### Řešení:

Stanovíme nejdříve hypotézy  **$H_0 : \mu = 15$**  a  **$H_1 : \mu \neq 15$** . Protože z daných dat vyplývají následující údaje :  $n = 16$ ;  $\bar{X} = 12,625$ ;  $s = 2,849$ . Můžeme dále zjistit kritický obor pomocí náhodné veličiny studentova rozdělení s 15 stupni volnosti

$\mathcal{W} = \{t; |t| \geq 2,95\}$ , dosadíme tedy do testové statistiky (17.2) a získáme následující hodnoty  $t = \frac{12,625 - 15}{2,849} \cdot \sqrt{16} = \frac{-2,375}{2,849} \cdot 4 = -3,33$ , protože tato hodnota -3,33 leží v kritickém

oboru přijímáme alternativní hypotézu  $H_1$ . Pokud bychom hledali tzv.  $p$  hodnotu (  $p$ -value ) těchto dat ( jde o hodnotu hladiny významnosti při které bude poprvé přijata hypotéza  $H_0$  ), získali bychom v tomto případě  $p=0,0045$ , tato hodnota je více než poloviční než byla uvedena úvodní testovaná hladina významnosti.

### Příklad 17.4

Po stanovení měření hodnot vzdáleností mezi dvěma sazenicemi na záhoně jsme získali následující hodnoty :

|   |   |   |   |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |   |    |    |
|---|---|---|---|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|
| 4 | 5 | 7 | 8 | 12 | 10 | 5 | 9 | 11 | 18 | 15 | 12 | 14 | 12 | 10 | 9 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|---|----|----|

Ověřte na hladině významnosti 5% zda vzdálenosti mezi jednotlivými sazenicemi jsou vzdálené nejvýše 12 jednotek.

#### Řešení:

Nejdříve stanovíme opět testovanou a alternativní hypotézu. Zřejmě tedy bude  $H_0: \mu \leq 12$  a  $H_1: \mu > 12$ . V našem případě máme tedy stanovenou pravostrannou alternativní hypotézu, kritický obor je tedy stanoven jako  $\mathcal{W} = \{t; t \geq t_{0,95}\} = \{t; t \geq -1,74\}$ .

Z uvedených hodnot získáme opět základní hodnoty  $n = 18; \bar{X} = 10,222; s = 3,623$ . Pro další postup je nutné vypočítat hodnotu testové statistiky pro tato čísla, její velikost je rovna  $t = -2,082$ . Pro stanovení odpovědi na naši otázku nyní ověříme, zda hodnota vypočtené testové statistiky patří či nepatří do kritického oboru. Vypočtená hodnota nepatří do kritického oboru, nemůžeme tedy na hranici významnosti 5% zamítnout možnost, že mezi sazenicemi je vzdálenost nejvýše 12 jednotek. Pokud bychom hledali p-hodnotu zjistili bychom, že je na úrovni čísla 0,0264.

### 17.1.2 Směrodatná odchylka $\sigma$

Směrodatná odchylka má pro normální rozdělení stejný význam jako střední hodnota. Oba tyto parametry sice ovlivňují hodnoty normálního rozdělení každý jinak, ale celkově je toto rozdělení dvouparametrické, potřebujeme proto znát oba parametry stejně dobře.

#### 17.1.2.1 Při známém parametru $\mu$

V kapitole o bodovém odhadu směrodatné odchylky populace popsané pomocí normálního rozdělení jsme rozlišovali zda známe střední hodnotu normálního rozdělení či zda je neznáma.

Chceme tedy testovat na základě náhodného výběru o  $n$  prvcích z populace hypotézu  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ . Jestliže byla střední hodnota  $\mu_0$  populace známa potom vybíráme jako testovací statistiku náhodnou veličinu

$$\chi_0^2 = n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2}, \quad (17.3)$$

která má při platnosti hypotézy  $H_0$  rozdělení  $\chi^2$  (chi kvadrát) s  $n$  stupni volnosti.

Podobně jako v předchozích případech můžeme stanovovat kritické obory v závislosti na hodnotách alternativní hypotézy.

#### Pravostranná alternativní hypotéza $\sigma^2 > \sigma_0^2$ .

Je zřejmé, že kritický obor je pak dán  $\mathcal{W} = \{\chi_0^2; \chi_0^2 \geq \chi^2(p; n)\}$ , kde  $\chi^2(p; n)$  je roven  $p\%$  kvantilu rozdělení chi kvadrát s  $n$  stupni volnosti.

#### Levostranná alternativní hypotéza $\sigma^2 < \sigma_0^2$ .

Kritickým oborem v tomto případě je  $\mathcal{W} = \{\chi_0^2; \chi_0^2 \leq \chi^2(1-p; n)\}$

**Oboustranná alternativní hypotéza  $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ .**

Kritický obor je v tomto případě složitější, jde o dva disjunktní intervaly

$$\mathcal{W} = \left( 0; \chi^2 \left( \frac{p}{2}; n \right) \right) \cup \left( \chi^2 \left( 1 - \frac{p}{2}; n \right); \infty \right)$$

**Příklad 17.5**

Při kontrolním měření byly zjištěny následující hodnoty 0,62; 0,64; 0,57; 0,61; 0,59; 0,57; 0,62; 0,59 za platnosti, že střední hodnota je rovna 0,5. Rozhodněte, zda je platná:

a)  $H_0 : \sigma^2 = 0,003$  proti  $H_1 : \sigma^2 \neq 0,003$

b)  $H_0 : \sigma^2 = 0,003$  proti  $H_1 : \sigma^2 < 0,003$ .

Ověření proveďte na hladině významnosti 5%.

**Řešení:**

Nejdříve stanovíme základní hodnoty  $n = 8$ ;  $\bar{X} = 0,60125$ ;  $s = 0,025319$ ;  $s^2 = 0,000641$ .

Část a) je případem oboustranné hypotézy, stanovíme tedy kritický obor pro tento případ.

$$\mathcal{W} = \left( 0; \chi^2_{\frac{p}{2}} \right) \cup \left( \chi^2_{1-\frac{p}{2}}; \infty \right) = (0; 2,18) \cup (17,535; \infty). \text{ Dále musíme ještě zjistit}$$

hodnotu testovací statistiky (17.3), po dosazení vychází  $\chi_0^2 = 3,6042$ . Protože se nenachází v kritickém oboru nemůžeme hypotézu  $H_0$  zamítnout.

V případě části b) stanovíme opět kritický obor  $\mathcal{W} = \{ \chi_0^2; \chi_0^2 \leq \chi^2(1-p; n) \} = (0; 2,733)$ . Protože hodnota testovací statistiky leží i v tomto případě mimo kritický obor nemůžeme ani nyní hypotézu  $H_0$  zamítnout.

**17.1.2.2 Při neznámém parametru  $\mu$** 

Při práci s neznámou populací většinou její střední hodnotu  $\mu$  neznáme, proto je více reálný případ, který budeme vyšetřovat v této části. Podle kapitoly 8., v níž jsme probírali bodové odhady je náhodná veličina

$$\chi^2 = (n-1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}, \quad (17.4)$$

typu  $\chi^2$  s  $(n-1)$  stupni volnosti. Podobně jako v předchozí podkapitole tohoto tvrzení využijeme ke konstrukci vhodné testovací statistiky.

Chceme tedy testovat na základě náhodného výběru o  $n$  prvcích z populace hypotézu  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ . Jestliže byla střední hodnota  $\mu_0$  populace známa potom vybíráme jako testovací statistiku náhodnou veličinu

$$\chi^2 = (n-1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}, \quad (17.5)$$

která má při platnosti hypotézy  $H_0$  rozdělení  $\chi^2$  (chi kvadrát) s  $(n-1)$  stupni volnosti. Proti předchozí části tedy získáváme statistiku stejného typu, ale protože musíme z dat získávat navíc informaci o odhadu parametru  $\mu$  je počet stupňů volnosti o jeden menší.

Podobně jako v předchozích případech můžeme stanovovat kritické obory v závislosti na hodnotách alternativní hypotézy.

**Pravostranná alternativní hypotéza  $\sigma^2 > \sigma_0^2$ .**

Je zřejmé, že kritický obor je pak dán  $\mathcal{W} = \{\chi^2; \chi^2 \geq \chi^2(p; n-1)\}$ , kde  $\chi^2(p; n-1)$  je roven p% kvantilu rozdělení chi kvadrát s **(n-1)** stupni volnosti.

**Levostranná alternativní hypotéza  $\sigma^2 < \sigma_0^2$ .**

Kritickým oborem v tomto případě je  $\mathcal{W} = \{\chi^2; \chi^2 \leq \chi^2(1-p; n-1)\}$

**Oboustranná alternativní hypotéza  $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ .**

Kritický obor je v tomto případě složitější, jde o dva disjunktní intervaly

$$\mathcal{W} = \left(0; \chi^2\left(\frac{p}{2}; n-1\right)\right) \cup \left(\chi^2\left(1-\frac{p}{2}; n-1\right); \infty\right)$$

### Příklad 17.6

Měřením jistého výrobku jsme získali následující hodnoty:

15,15; 15,2; 15,04; 15,14; 15,22.

Předpokládejme, že výsledky těchto měření jsou náhodné veličiny  $N(\mu, \sigma^2)$ . Testujme následující případy :

- $H_0 : \sigma^2 = 0,03$  a  $H_1 : \sigma^2 < 0,03$
- $H_0 : \sigma^2 = 0,03$  a  $H_1 : \sigma^2 \neq 0,03$

### Řešení:

- Alternativní hypotéza je levostranná, tedy jejím kritickým oborem je  $\mathcal{W} = \{\chi^2; \chi^2 \leq \chi^2(1-p; n-1)\} = (0; 2,17)$ . Musíme nyní zjistit hodnotu testovací statistiky z výrazu uvedeném v (17.5). Po dosazení naměřených hodnot

$$\text{získáváme } \chi^2 = (n-1) \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} = 7 \cdot \frac{0,0196}{0,03} = 4,5733. \text{ Protože tato hodnota}$$

neleží v kritickém oboru hypotézu  $H_0$  nemůžeme zamítnout.

- Alternativní hypotéza v tomto případě je oboustranná, kritický obor sestojíme podle výše uvedených pravidel.  $\mathcal{W} = (0; 1,69) \cup (16,013; \infty)$ . Protože ani v tomto případě neleží hodnota testovací statistiky v kritickém oboru hypotézu  $H_0$  nezamítáme.

V další části se budeme zabývat srovnáváním dvou náhodných veličin typu  $N(\mu, \sigma^2)$ . Osvojíme si metody, které se obecně nazývají t-test a F-test. V rámci nich jsou velmi významným faktorem rozdělení studentovo a Fischer – Snedecorovo.

## 17.1.3 Testy pro podíl rozptylů

Nechť  $X_1$  a  $X_2$  jsou náhodné výběry z rozdělení  $N(\mu_1; \sigma_1^2)$  a  $N(\mu_2; \sigma_2^2)$  s počtem členů výběru  $n_1$  resp.  $n_2$ . Chceme zjistit intervalový odhad pro podíl rozptylů náhodných veličin

tedy  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ . Při stanovení tohoto intervalového odhadu budeme vycházet z kapitoly 3 ze vztahu (3.21). Dále je nutno rozlišovat dva různé případy:

### 17.1.3.1 Střední hodnoty $\mu_1$ a $\mu_2$ jsou známy

Potom je náhodná veličina  $F = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \mu_1)^2}{n_1 \cdot \sigma_1^2}}{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \mu_2)^2}{n_2 \cdot \sigma_2^2}}$  je Fischer – Snedecorovo rozdělení

s  $(n_1; n_2)$  stupni volnosti. V tomto případě je proto oboustranný  $(100-p) \%$  interval spolehlivosti roven:

$$\frac{1}{F_{1-\frac{p}{2}}} \cdot \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \mu_1)^2}{n_1}}{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \mu_2)^2}{n_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \mu_1)^2}{n_1}}{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \mu_2)^2}{n_2}}, \quad (17.6)$$

kde hodnoty  $F_p$  jsou příslušné kvantily rozdělení  $F(n_1; n_2)$ . Z těchto tvrzení vyjdeme ve stanovení základních hypotéz.

Stanovujeme hypotézu  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , alternativní hypotézu  $H_1$  stanovujeme jako

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ . Za předpokladu, že platí hypotéza  $H_0$  je zřejmě podíl  $\frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \mu_1)^2}{n_1}}{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \mu_2)^2}{n_2}}$  prvkem

intervalu  $\left( F_{\frac{p}{2}}; F_{1-\frac{p}{2}} \right)$ . Tedy kritickým oborem je v tomto případě sjednocení intervalů:

$$\mathcal{W} = \left( 0; F_{\frac{p}{2}} \right) \cup \left( F_{1-\frac{p}{2}}; \infty \right).$$

### 17.1.3.2 Střední hodnoty $\mu_1$ a $\mu_2$ jsou neznámé

Při tvorbě takového intervalu spolehlivosti vycházíme opět z vlastností F- rozdělení.

Náhodná veličina  $F = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{(n_1-1) \cdot s_1^2}}{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_2-1) \cdot s_2^2}}$  je potom Fischer – Snedecorovo rozdělení s  $(n_1-1; n_2-1)$

stupni volnosti. Konstrukce oboustranného  $(100 - p)\%$  intervalu spolehlivosti v tomto případě je velmi podobná konstrukci uvedené v předchozí části :

$$\frac{1}{F_{1-\frac{p}{2}}} \cdot \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n_1-1}}{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n_2-1}} = \frac{1}{F_{1-\frac{p}{2}}} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{F_{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n_1-1}}{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n_2-1}} = \frac{1}{F_{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (17.7),$$

kde hodnoty  $F_p$  jsou kvantily F – rozdělení s  $(n_1-1; n_2-1)$  stupni volnosti.

Podobně jako v předchozí části stanovujeme hypotézu  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  , alternativní hypotézu  $H_1$  stanovujeme jako  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ .

Za předpokladu , že platí hypotéza  $H_0$  je zřejmě podíl  $\frac{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n_1-1}}{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n_2-1}} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$  prvkem

intervalu  $\left( F_{\frac{p}{2}}; F_{1-\frac{p}{2}} \right)$ . Tedy kritickým oborem je i v tomto případě sjednocení intervalů:

$$\mathcal{W} = \left( 0; F_{\frac{p}{2}} \right) \cup \left( F_{1-\frac{p}{2}}; \infty \right).$$

Oba případy se liší použitím náhodných veličin F- rozdělení o různých stupních volnosti.

Práce s oběma předchozími hypotézami se obecně nazývá F – test. Rozhodujeme v něm o tom, zda můžeme přijmout či vyvrátit rovnost  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  na dané hladině významnosti. Tento test se užívá velmi často v regresní analýze, v t – testu a v analýze rozptylu ( ANOVA ).

Velmi důležitými parametrickými testy jsou tzv. t – testy, pomocí nichž zjišťujeme , zda dvě náhodné veličiny mají stejné střední hodnoty.

### 17.1.4 Testy o shodě středních hodnot dvou normálních rozdělení

Jak už jsme uvedli dříve budeme v této části testovat základní hypotézu  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  . Jako alternativní hypotézu můžeme volit buď jednostranné nebo oboustranné hypotézy.

Nechť tedy podobně jako v předchozí části jsou  $\mathbb{X}_1$  a  $\mathbb{X}_2$  náhodné výběry z rozdělení  $N(\mu_1; \sigma_1^2)$  a  $N(\mu_2; \sigma_2^2)$  s počtem členů výběru  $n_1$  resp.  $n_2$ . V celé této části budeme vyšetřovat hypotézy na hladině významnosti  $p$ . V dalším musíme rozlišovat několik různých případů.

#### 17.1.4.1 Rozptyly populací $\sigma_1^2$ a $\sigma_2^2$ jsou známy

Již z předchozích kapitol je známo, testové kritérium

$$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (17.8),$$

je typu  $N(0;1)$ . Odtud můžeme odvodit kritické obory pro případy jednotlivých alternativních hypotéz :

1.  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$  .  $\mathcal{W} = (-\infty; u_{1-p})$
2.  $H_1 : \mu_1 < \mu_2$  .  $\mathcal{W} = (u_p; \infty)$
3.  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  .  $\mathcal{W} = (-\infty; -u_{1-\frac{p}{2}}) \cup (u_{1-\frac{p}{2}}; \infty)$

Ovšem případy , kdy jsou známy rozptyly populací jsou velmi řídké, proto větší uplatnění mají testy , kdy příslušné hodnoty rozptylů populací nejsou známy.

#### Příklad 17.7

Rozhodněme na hladině významnosti , zda výsledky testů v jedné škole jsou nižší než výsledky testů ve škole druhé. Provedli jsme náhodný výběr **50** studentů v první škole a **40** studentů ve škole druhé. Průměrné výsledky testů studentů první školy byly 275 bodů a druhé školy 280 bodů. Z dřívějších testů jsou známy rozptyly obou škol  $\sigma_1^2 = 48$  a.

#### Řešení:

Testovaná statistika  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  a zřejmě  $H_1 : \mu_1 < \mu_2$  . Dosadíme tedy do (17.8) a  $u = \frac{275 - 280}{\sqrt{\frac{48}{50} + \frac{41}{40}}} = -3,549$  . Podle předchozího je pro tento případ alternativní hypotézy kritický

obor  $\mathcal{W} = (-\infty; -1,645)$  . Hodnota testové statistiky patří tedy do kritického oboru , takže zamítáme testovanou hypotézu  $H_0$  a přijímáme hypotézu alternativní tj. výsledky druhé školy mají větší bodové ohodnocení.

#### Příklad 17.8

Rozhodněte na hladině významnosti 1% , zda jsou shodné vzdálenosti dojezdu dvou typů pneumatik. První typ jsme testovali v 25 kusech a průměrná vzdálenost dojezdu činila 21 500 km ; druhý typ jsme testovali 15 kusů s průměrným dojezdem 23 200 km. Rozptyl dojezdu první pneumatik  $\sigma_1^2 = 400 \text{ km}^2$  a druhých pneumatik  $\sigma_2^2 = 560 \text{ km}^2$ .

**Řešení:**

Testovaná statistika  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  a zřejmě  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ . Opět dosadíme do vztahu

$$(17.8) \quad u = \frac{21500 - 22200}{\sqrt{\frac{400}{25} + \frac{560}{15}}} = -95,85. \text{ Vzhledem k oboustrannému testu je hodnota } 99,5\%$$

kvantilu  $N(0,1)$  rovna 2,58. Tedy hodnota leží v kritickém oboru (leží v kritickém oboru i pro případ jednostranného testu, kdy  $\mu_1 < \mu_2$ ). Proto hypotézu  $H_0$  zamítáme a přijímáme hypotézu  $H_1$ .

**17.1.4.2 Rozptyly populací jsou neznámé, ale jsou si rovny**

V tomto případě použijeme opět metodu vedoucí na testovou statistiku:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S^2(x) \cdot \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (17.9)$$

Následující hodnota  $S(x)$  se nazývá společný výběrový rozptyl a je váženým průměrem výběrových rozptylů  $S_1^2(x)$  a  $S_2^2(x)$  s vahami  $n_1 - 1$  a  $n_2 - 1$ , tedy jeho hodnota je rovna

$$S(x) = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2(x) + (n_2 - 1) \cdot S_2^2(x)}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (17.10).$$

Náhodná veličina (17.9) je při platnosti  $H_0$  studentovo rozdělení s  $n_1 + n_2 - 2$  stupni volnosti. Nyní již tedy můžeme určit kritické obory pro různé formulace alternativních hypotéz  $H_1$ .

1.  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ .  $\mathcal{W} = (t_{n_1+n_2-2; 1-p}; \infty)$
2.  $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ .  $\mathcal{W} = (-\infty; t_{n_1+n_2-2; p})$
3.  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ .  $\mathcal{W} = (-\infty; -t_{n_1+n_2-2; 1-\frac{p}{2}}) \cup (t_{n_1+n_2-2; 1-\frac{p}{2}}; \infty)$

K tomu abychom mohli rozhodnout, že neznámé rozptyly  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  si jsou rovny musíme použít v tomto případě **F**-test viz 17.1.3. Uvedeme opět několik příkladů pro tuto situaci.

**Příklad 17.9**

Ve dvou prodejnách jsme zjišťovali ceny určitého typu produktu, získali jsme následující výsledky:

$$n_1 = 28, \quad \bar{x}_1 = 104,74, \quad s_1^2 = 505,14$$

$$n_2 = 30, \quad \bar{x}_2 = 117,97, \quad s_2^2 = 789,83$$

Předpokládáme normalitu uvedených dat, ověřte shodu středních hodnot cen v obou prodejnách.

**Řešení:**

Nejdříve použijeme F – test na ověření shody rozptylů cen v obou prodejnách . Hodnota testovací statistiky pro F – test je v našem případě rovna

$$F = \frac{505,14}{789,83} = 0,63956$$

Tato hodnota neleží v kritickém oboru F – testu . Na hladině 0,05 jsme tedy neprokázali to , že by se rozptýly cen v obou prodejnách lišily.

Nyní tedy využijeme statistiku (17.9) ke stanovení rozdílu mezi středními hodnotami.

$$t = \frac{104,74 - 117,97}{\sqrt{652,55 \cdot \left( \frac{1}{28} + \frac{1}{30} \right)}} = -1,97096$$

Kritické hodnota pro oboustranný test je rovna 2,003697. Tedy test neprokázal na hladině významnosti 0,05 mezi cenami žádný rozdíl.

### Příklad 17.10

V podniku byly zkoumány dva odlišné technologické postupy . Máme na hladině významnosti 0,05 zjistit , zda se od sebe liší! Dále následují celkem tuny výroby prvním a druhým postupem vždy za jednu směnu:

| 1.<br>technologický<br>postup | 2.<br>technologický<br>postup |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 16,3                          | 16,5                          |
| 15,8                          | 16,2                          |
| 14,9                          | 16,7                          |
| 15,3                          | 15,8                          |
| 16                            | 14,5                          |
| 15,7                          | 15,6                          |
| 15,4                          | 14,8                          |
| 16,3                          | 15                            |
| 15,8                          | 14,9                          |
| 14,8                          | 14,6                          |
| 16,7                          |                               |
| 13,8                          |                               |
| 15,6                          |                               |
| 16,3                          |                               |

### Řešení:

Prvním krokem bude porovnání rozptylů obou technologických postupů. Z daných hodnot zjistíme , že  $s_1^2 = 0,571044$ ,  $n_1 = 14$ ;  $s_2^2 = 0,658222$ ,  $n_2 = 10$ . Hodnota testové statistiky je proto rovna  $F = \frac{0,571044}{0,658222} = 0,867555$ . Tato hodnota neleží opět v kritickém oboru F – testu , nemůžeme tedy zamítnout hypotézu  $H_0$  o rovnosti obou rozptylů.

Postupujeme jako v předchozím případě , zjistíme hodnotu testové statistiky  $t = 0,500552$  . Ověříme si kritické hodnoty studentova rozdělení s 22 stupni volnosti ( jde o oboustranný test ) : 2,07388 . Z těchto hodnot vyplývá , že na hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu o shodných výsledcích obou technologických postupů.

### 17.1.5 Rozptyly nejsou známy a nejsou si rovny

V tomto případě pro malé hodnoty  $n_1$  a  $n_2$  použijeme následující postup . Místo předchozího dvouvýběrového  $t$  – testu používáme jedné z alternativ :

1. **Cochran – Coxův** test - vypočteme:

$$S = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}, \text{ dále } T^* = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{S} \text{ a konečně } t^* = \frac{\frac{s_1^2}{n_1} \cdot t_{n_1-1}(\alpha) + \frac{s_2^2}{n_2} \cdot t_{n_2-1}(\alpha)}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}. \text{ Hypotézu}$$

$H_0$  zamítneme , jestliže  $|T^*| \geq t^*$  ( v tomto případě jde o oboustranný test ).

2. **Welchův** test: Nejdříve určíme aproximaci stupňů volnosti

$$N_W = \frac{\left( \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{n_1 - 1} + \frac{\frac{s_2^2}{n_2}}{n_2 - 1}}, \text{ toto číslo většinou zaokrouhlujeme dolů na nejbližší celé kladné}$$

číslo. Vypočteme opět  $|T^*|$  jako v předchozím způsobu a porovnáme s  $t_{N_W}(\alpha)$ .

3. **Satterthwaiteův** test . Opět určíme aproximaci stupňů volnosti

$$N_S = \frac{\left( \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\frac{s_1^2}{n_1}}{n_1 + 1} + \frac{\frac{s_2^2}{n_2}}{n_2 + 1}} - 2. \text{ Výsledek opět zaokrouhlíme dolů na nejbližší celé kladné}$$

číslo. Vypočteme opět  $|T^*|$  jako v předchozím způsobu a porovnáme s  $t_{N_S}(\alpha)$ .

Hladina každého z těchto tří testů je přibližně rovna  $\alpha$  .

#### Příklad 17.11

Pole stejných rozměrů byla upravena dvěma různými způsoby . Výsledné parametry sklizní jsou následující  $n_1 = 32$ ,  $\bar{x}_1 = 23$ ,  $s_1 = 1,78$ ;  $n_2 = 59$ ,  $\bar{x}_2 = 28,3$ ,  $s_2 = 2,56$  . Zjistěte, zda obě úpravy pole vedou ke stejným výsledkům!

#### Řešení :

Nejdříve určíme hodnotu  $F$  – testu , číselně je rovna 0,48346 . Pro dané stupně volnosti leží toto číslo v kritickém oboru  $F$  – testu . Tedy zamítáme hypotézu  $H_0$  o stejných rozptylech. (  $p$  – value = 0,0305 ).

Budeme tedy určovat hodnotu statistiky  $T^* = -78,54152$  . Hodnoty jednotlivých  $t^*$  jsou postupně pro metodu 1. 2,0195 ; pro metodu 2. 1,989 a konečně pro metodu 3. 1,988. Pokud bychom tedy zvolili libovolnou z výše uvedených metod , dospěli bychom k zamítnutí možnosti o stejných výsledcích.