



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



ESF II projekt Západočeské univerzity v Plzni

reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239

1 Definice a průběhy neharmonických veličin

Harmonická analýza

V teorii i v praxi se setkáváme s takovými průběhy elektrických veličin, které jsou sice periodické (alespoň v určitém časovém intervalu), ale jejich průběh je neharmonický. Protože se však velmi dobře a výhodně pracuje s harmonickými průběhy, je často požadováno vyjádřit periodickou harmonickou veličinu jako nekonečnou řadu složenou z konstanty a harmonických veličin o kmitočtech rovných přirozeným násobkům základního kmitočtu. Tento rozklad se nazývá *harmonická analýza*. Vzniklá řada se nazývá *Fourierova řada*.

Základní vlastnosti Fourierovy řady

Funkci $f(t)$ budeme nazývat periodickou, pokud pro všechna t platí:

$$f(t+T) = f(t)$$

Funkce $f(t)$ musí splňovat tzv. Dirichletovy podmínky, tj. funkce musí být v intervalu $\langle 0; T \rangle$ jednoznačná, konečná, po částech spojitá a musí mít konečný počet maxim a minim. Fourierova řada periodické funkce $f(t)$ s úhlovým kmitočtem ω má tvar:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} [a_h \cos(h\omega t) + b_h \sin(h\omega t)]$$

Fourierovy koeficienty jsou

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_h = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(h\omega t) dt$$

$$b_h = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(h\omega t) dt, \quad h = 1, 2, \dots$$

V praxi splňují mnohé funkce další vlastnosti a platí:

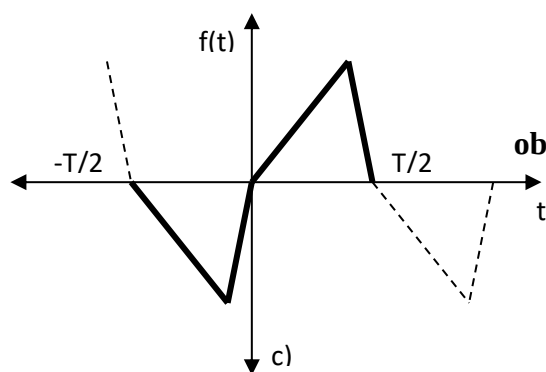
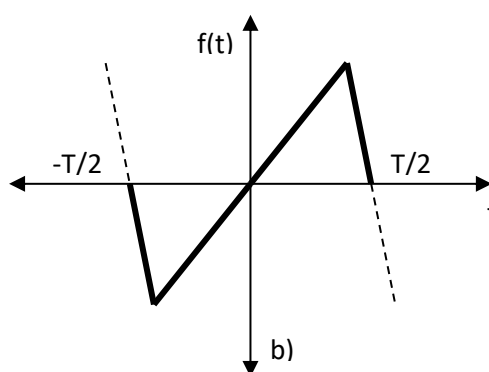
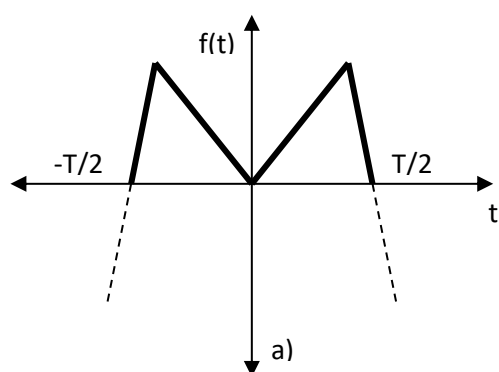


a) Pro *sudou* funkci platí: $f(-t) = f(t)$. Graf je souměrný podle osy y, Fourierova řada obsahuje pouze členy s funkcí *cosinus* - viz.obr.a.

b) Pro *lichou* funkci platí: $f(-t) = -f(t)$. Graf je středově souměrný vzhledem k počátku. Fourierova řada obsahuje pouze členy s funkcí *sinus* – viz.obr.b.

c) Pro funkci, jejíž graf se skládá z částí téhož tvaru, které však zaujímají různou polohu vzhledem k ose t, tj.: $f(t) = -f(t \pm T/2)$, platí že Fourierova řada této funkce obsahuje jen takové členy s funkcemi sinus a cosinus, jejichž koeficienty a_n, b_n mají liché indexy. Tato funkce se nazývá *antiperiodická* – viz.obr..

V teorii polovodičových měničů často nastávají současně případy **b** i **c**, takže výsledkem je Fourierova řada obsahující pouze liché členy s funkcí sinus.



obr. 2 – Speciální případy periodických funkcí

- a) sudá funkce
- b) lichá funkce
- c) antiperiodická funkce



Charakteristické a necharakteristické harmonické, meziharmonické

Vzhledem k tomu, že účinky měničů na napájecí síť lze vzhledem k dalším spotřebičům považovat za jev negativní, mluvíme o rušení. Obor, který se zabývá eliminací vzniklých negativních vlivů spotřebičů na soustavu, a naopak odolností zařízení proti negativním vlivům se nazývá elektromagnetická kompatibilita (EMC).

Zajištění EMC znamená, že emise elektromagnetického rušení jednotlivých zařízení musí být omezena tak, aby výsledné rušení nezpůsobilo vadnou funkci zařízení citlivých na rušení.

Proto, aby existovala možnost určení mezí vlivu spotřebičů na soustavu, je nutné definovat nejprve pojem *harmonická*. Podle normy ČSN IEC 50(161) je definována harmonická jako složka většího než 1. řádu Fourierovy řady periodické veličiny. Současně je definována v téže normě *základní harmonická* jako složka 1. řádu Fourierovy řady periodické veličiny. *Řád harmonické* je celé číslo, dané poměrem kmitočtu harmonické a základní harmonické. Jak je uvedeno, v souladu s normami se bude pro řád harmonické používat písmeno *h*.

U výkonových polovodičových měničů je velikost harmonických proudů dána určitými zákonitostmi. Nejvyšších hodnot nabývají obvykle harmonické, které vyhovují rovnici $h = kp \pm 1$, kde *k* je celé číslo a *p* je pulznost měniče. Tyto harmonické se nazývají *charakteristické harmonické*. Ostatní harmonické, jejichž řád nevyhovuje rovnici se nazývají *necharakteristické harmonické*.

V proudech, které jsou odebírány polovodičovými měniči z napájecí soustavy se však objevují též frekvence, jejichž hodnota není celočíselným násobkem základní harmonické. Pak nemůžeme hovořit o harmonických, ale o tzv. *meziharmonických*.

Výkony v obvodech s neharmonickými průběhy napětí a proudu

Předpokládejme, že v rozvodném systému je v místě připojení spotřebiče napětí, které lze vyjádřit Fourierovou řadou:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$$

kde $u_k(t) = \sqrt{2}U_k \sin(k\omega t + \varphi_{uk})$ a $u_0(t) = U_0$

Proud spotřebiče lze vyjádřit obdobně:

$$i(t) = \sum_{l=0}^{\infty} i_l(t)$$



$$\text{kde} \quad i_l(t) = \sqrt{2}I_l \sin(l\omega t + \varphi_{il}) \quad a \quad i_0(t) = I_0$$

Základní definice výkonu vychází z definice okamžitého výkonu, kde platí:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Dosazením dostaneme:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} i_l(t)$$

Pro praxi je definován tzv. činný výkon, a to jako střední hodnota okamžitého výkonu:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u_k(t) \cdot i_l(t) dt$$

Dvojitou sumaci lze s integrací zaměnit:

$$P = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^T u_k(t) \cdot i_l(t) dt$$

Výpočtem dostaneme:

$$\text{a) Pro } k = l = 0: \quad \frac{1}{T} \int_0^T u_0(t) \cdot i_0(t) \cdot dt = \frac{U_0 \cdot I_0}{T} \int_0^T dt = U_0 \cdot I_0 = P_0$$

b) Pro $k = l \neq 0$:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_k(t) \cdot i_l(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \sqrt{2}U_k \sqrt{2}I_l \int_0^T [\sin(k\omega t + \varphi_{uk}) \cdot \sin(l\omega t + \varphi_{il})] dt = U_k I_k \cos \varphi_k$$

$$\text{kde} \quad \varphi_k = \varphi_{uk} - \varphi_{ik}$$

$$\text{c) Pro } k \neq l \quad : \quad \frac{1}{T} \int_0^T u_k(t) \cdot i_l(t) dt = 0$$

Využitím odvozených vztahů lze psát:



$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots = \sum_{h=0}^{\infty} P_h = P_0 + \sum_{h=1}^{\infty} U_h I_h \cos \varphi_h$$

Činný výkon neharmonického napětí a proudu je roven součtu činných výkonů jednotlivých harmonických a stejnosměrného výkonu.

Zdánlivý výkon, zavedený jako pomocná veličina z výpočtových důvodů, je obdobně jako u harmonických napětí a proudů definován jako součin efektivních hodnot napětí a proudů.

$$S = U \cdot I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} I_l^2}$$

Jalový výkon udává míru energie, která střídavě kmitá mezi zdrojem a spotřebičem:

$$Q = \sum_{h=1}^{\infty} Q_h = \sum_{h=1}^{\infty} U_h I_h \sin \varphi_h$$

Protože u neharmonických průběhů dochází k nerovnosti:

$$S^2 \geq P^2 + Q^2$$

zavádí se pojem deformační výkon, definovaný:

$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$$

Deformační výkon, obdobně jako výkon jalový, představuje neúčinnou složku zdánlivého výkonu, vyvolávajícího nárůst ztrát v napájecí síti a snížení využitelnosti sítě a měniče. V neharmonických obvodech pak nestačí uvádět pouze účinník $\cos \varphi_1$, nýbrž je zaveden tzv. skutečný (celkový) účinník Λ . Velmi často přejímaný název je faktor výkonu (*Power Factor*), a označuje se v literatuře buď písmenem Λ , nebo písmenem PF.

$$\Lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}$$

Λ a $\cos \varphi_1$ nelze zaměňovat, neboť dochází (zejména u měničů kmitočtu s napětovým střídačem) k velmi rozdílným hodnotám obou účinníků. Může docházet k takovým stavům, že požadujeme regulaci soustavy na $\cos \varphi_1 \rightarrow 1$, ale celkový účinník Λ zůstává velmi nízký.

V odborné literatuře se někdy uvažuje napětí jednovlnné, pouze se základní harmonickou. Pokud budeme uvažovat napětí pouze jednovlnné, v předchozích rovnicích se za index k dosadí číslo 1. Pak se předchozí rovnice velmi zjednoduší na:

$$P = P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 \quad Q = Q_1 = U_1 I_1 \sin \varphi_1$$



$$S = U \sqrt{\sum_{l=1}^{\infty} I_l^2} = UI_1 + U \sqrt{\sum_{l=2}^{\infty} I_l^2} = UI_1 \cos \varphi_1 + UI_1 \sin \varphi_1 + U \sqrt{\sum_{l=2}^{\infty} I_l^2} = P_1 + Q_1 + D$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že zjednodušení lze použít tehdy, pokud nepracujeme s výkony, nebo v případě že zařízení pracuje v síti s velkým zkratovým výkonem. Pokud budeme vyšetřovat účinky měničů na síť a počítat zejména jejich energetické ukazatele, je obvykle nutné počítat s tím, že křivka napájecího napětí je zkreslená.

Poměrné hodnoty a celkový činitel zkreslení

Pro možnost posouzení velikosti harmonické se zavádí *poměrná hodnota h-té harmonické*. Ta je definována jako poměr efektivní hodnoty h-té harmonické a efektivní hodnoty základní harmonické. Definice platí jak pro proudové, tak i pro napěťové harmonické. Často jsou poměrné hodnoty harmonických udávány v procentních jednotkách.

Pak platí:

$$u_h = \frac{U_h}{U_1} \quad [-] \qquad u_{h\%} = \frac{U_h}{U_1} \cdot 100 \quad [\%]$$

a podobně $i_h = \frac{I_h}{I_1} \quad [-] \qquad i_{h\%} = \frac{I_h}{I_1} \cdot 100 \quad [\%]$

Pro posouzení obsahu harmonických v celkovém spektru se zavádí jednak (celkový) *činitel harmonických* (THF) a jednak (celkové) *harmonické zkreslení* (THD). Jestliže činitel harmonických je definován jako poměr efektivní hodnoty obsahu harmonických střídavé veličiny k efektivní hodnotě této veličiny, tak v případě harmonického zkreslení je ve jmenovateli efektivní hodnota základní harmonické této veličiny. Matematicky vyjádříme oba výrazy pro napětí a proudy:

$$THD_U = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U_1} \qquad THD_I = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1}$$

$$THF_U = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U} \qquad THF_I = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I}$$

Uvedené definice obsahují všechny frekvence obsažené ve sledovaném spektru. Jsou-li přítomny, tvar vlny proudu (napětí) již není periodický a může vytvářet účinky, které jsou komplexnější než pouze od harmonických.

Pokud se soustředíme dle normy pouze na harmonické, rovnice se zjednoduší na:



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



$$THD_U = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{40} U_h^2}}{U_1}$$

$$THD_I = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{40} I_h^2}}{I_1}$$

$$THF_U = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{40} U_h^2}}{U}$$

$$THF_I = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{40} I_h^2}}{I}$$

Součty se dle praxe IEC a dle většiny norem provádějí do řádu $h=40$, v některých normách a dle IEEE se provádí až do řádu $h=50$.

Pozn.: Zde je třeba upozornit na skutečnost, že v některé literatuře a ve firemních prospektech jsou uváděny tzv. "koeficienty zkreslení" napětí (proudu) bez toho, že je přesně popsána jejich definice. Pak můžeme dostat podstatně odlišné výsledky a učinit v rozhodování chybné závěry. Zejména u proudových veličin může dojít k tomu, že velikost harmonického zkreslení proudu (zejména u frekvenčních měničů) může přesáhnout hodnotu 100 %, kdežto činitel harmonických musí být vždy menší než 100 %.