

ESF II projekt Západočeské univerzity v Plzni

reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239

Chyby a nejistoty měření

Přednáška KET/ELM
J. Švarný



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Chyby a nejistoty měření

Obsah:

- Chyby měření – definice
- Chyby měření – matematické vyjádření
- Chyby měření – rozdělení dle příčiny vzniku
- Systematické chyby
- Náhodné chyby
- Elektromechanické přístroje – vlastnosti a chyby
- Digitální přístroje – vlastnosti a chyby
- Chyby nepřímých měření
- Nejistoty měření – definice
- Standardní nejistota typu A
- Standardní nejistota typu B
- Kombinovaná nejistota
- Rozšířená nejistota
- Literatura

Chyby měření

Definice

- Chyba měření – rozdíl mezi změřenou a pravou (skutečnou) hodnotou.
- Pravá (skutečná) hodnota není známa a není ji možné měřením určit.

Příčiny vzniku chyb:

- Nedokonalosti měřicích přístrojů
- Nedokonalost měřicích metod
- Variabilita podmínek měření
- Nezkušenost měřiče

Chyby měření

Matematické vyjádření

Absolutní chyba Δ

$$\Delta = x - x_0$$

kde: x ... změřená hodnota

x_0 ... pravá (skutečná) hodnota

Relativní chyba δ

$$\delta = \frac{\Delta}{x_0} \cong \frac{\Delta}{x} \quad (-)$$

Relativní chyba v **procentch** resp. **ppm** (parts per million)

$$\delta_{\%} = \frac{\Delta}{x_0} 100 \quad (-)$$

$$\delta_{ppm} = \frac{\Delta}{x_0} 10^6 \quad (-)$$

Chyby měření

Rozdělení podle příčin vzniku

Systematické – zkreslují výsledek pravidelným způsobem. Při opakování měření (za stejných podmínek) nemění znaménko ani velikost. Vznikají nedokonalostí metod a přístrojů, popř. chybou pozorovatele.

Náhodné – velikost a znaménko chyby se při opakovaném měření (za stejných podmínek) mění náhodně a nepředvídatelně. Vznikají kombinací velkého počtu náhodných vlivů (teplotní výkyvy, rušivá elektromagnetická pole, šum)

Hrubé – zkreslují výsledek zjevně nereálným způsobem. Vznikají většinou chybou pozorovatele.

Systematické chyby

Charakteristika

- Při opakovaném měření nemění znaménko ani velikost.
- Výsledek je zkreslen pravidelným způsobem.
- Většinou můžeme určit příčinu jejich vzniku.
- Lze je účinně potlačit – volbou vhodnější metody nebo vhodnějšího přístroje (viz příklad dále)
- Lze je odstranit – matematickou korekcí výsledku měření (viz příklad dále)

Systematické chyby

Příklad: Měření napětí skutečným voltmetrem

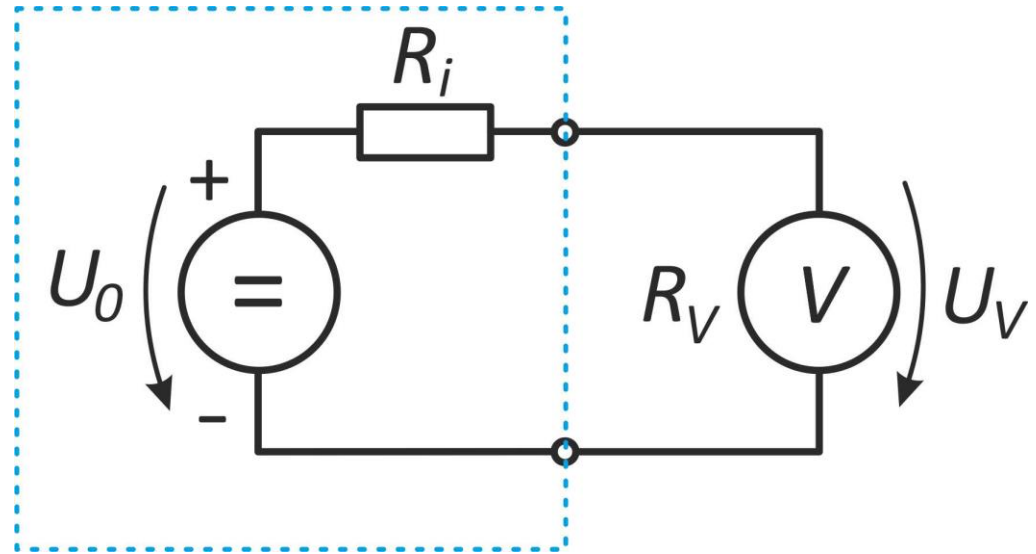
Pro $R_V < \infty$ a $R_i > 0$
je vždy: $U_V < U_0$

Absolutní chyba metody:

$$\Delta = U_V - U_0$$

Relativní chyba metody:

$$\delta = \frac{\Delta}{U_0} = \frac{U_V - U_0}{U_0} = \frac{-R_i}{R_i + R_V}$$



Chybu metody lze zde potlačit volbou voltmetru s větším R_V .

Systematické chyby

Příklad: Ohmova metoda měření odporů

S reálnými přístroji je vždy:

$$R_x^* = \frac{U_V}{I_A}, R_x^* \neq R_x$$

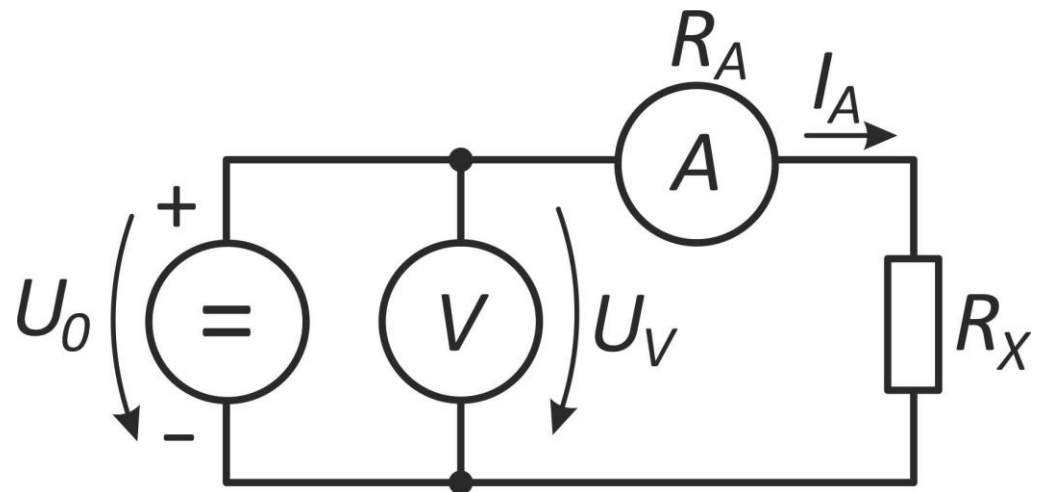
$$R_x = \frac{U_V - U_A}{I_A} = R_x^* - R_A$$

Absolutní chyba metody:

$$\Delta = R_x^* - R_x = R_A$$

Relativní chyba metody:

$$\delta = \frac{\Delta}{R_x} = \frac{R_A}{R_x}$$



Chybu metody lze zde odstranit korekcí: $R_x = R_x^* - R_A$.

Náhodné chyby

Charakteristika

- Při opakovaném měření mění velikost i znaménko.
- Vyskytují se při každém měření.
- Jsou způsobeny kombinací vnějších vlivů.
- Není možné je předvídat.
- Jejich výskyt popisuje normální (Gaussovo) rozdělení.
- Lze je charakterizovat směrodatnou odchylkou nebo rozptylem.

Náhodné chyby

Pro nekonečný počet opakování měření veličiny x (za stejných podmínek měření) tj. $n \rightarrow \infty$ (tzv. základní soubor) platí:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

kde:

x ...hodnota některého z provedených měření

$f(x)$...hustota pravděpodobnosti výskytu hodnoty o velikosti x

x_0 ...skutečná hodnota měřené veličiny

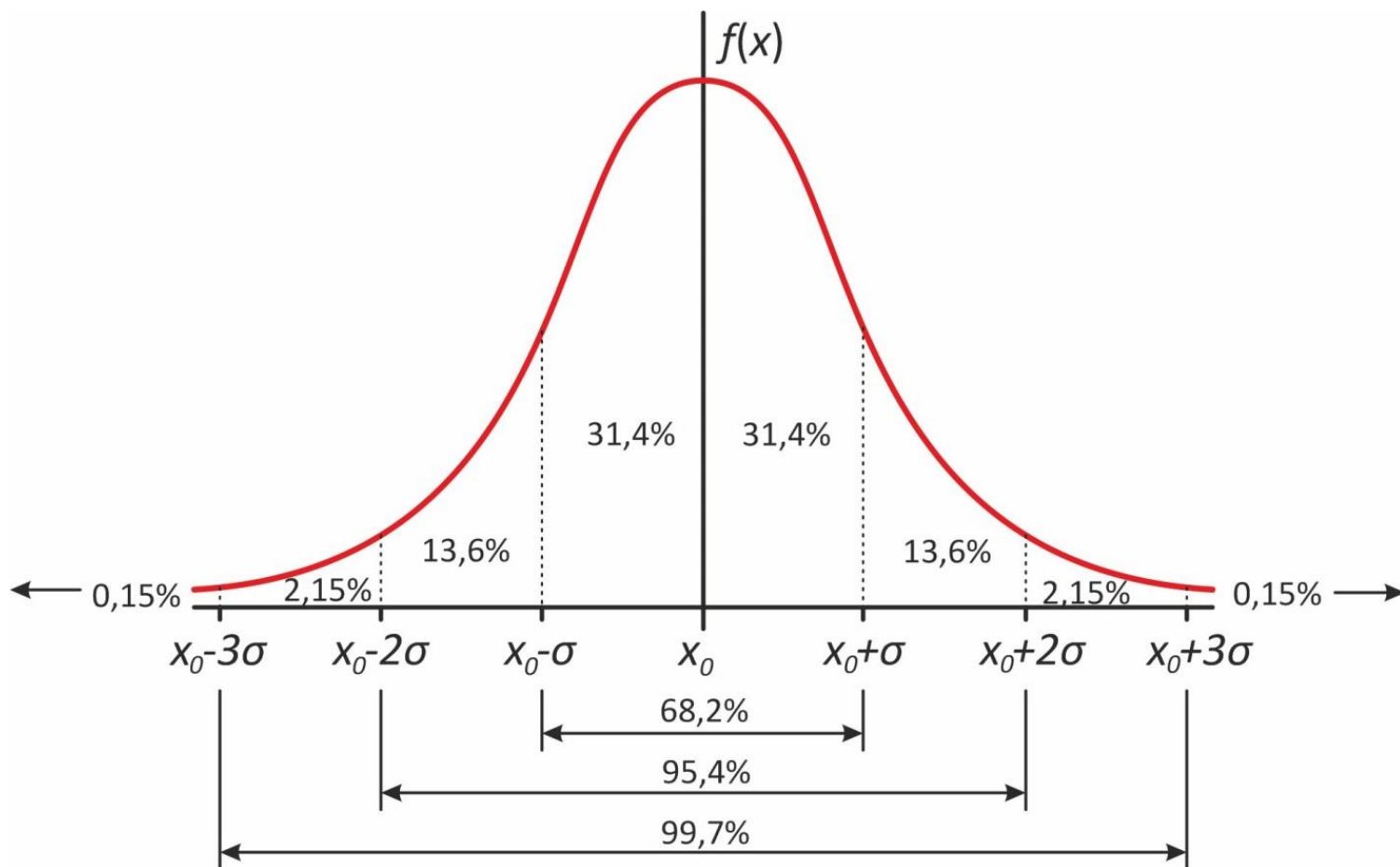
σ ...směrodatná odchylka – průměrná odchylka naměřené hodnoty x od skutečné hodnoty x_0

σ^2 ...rozptyl

Náhodné chyby

Gaussova křivka

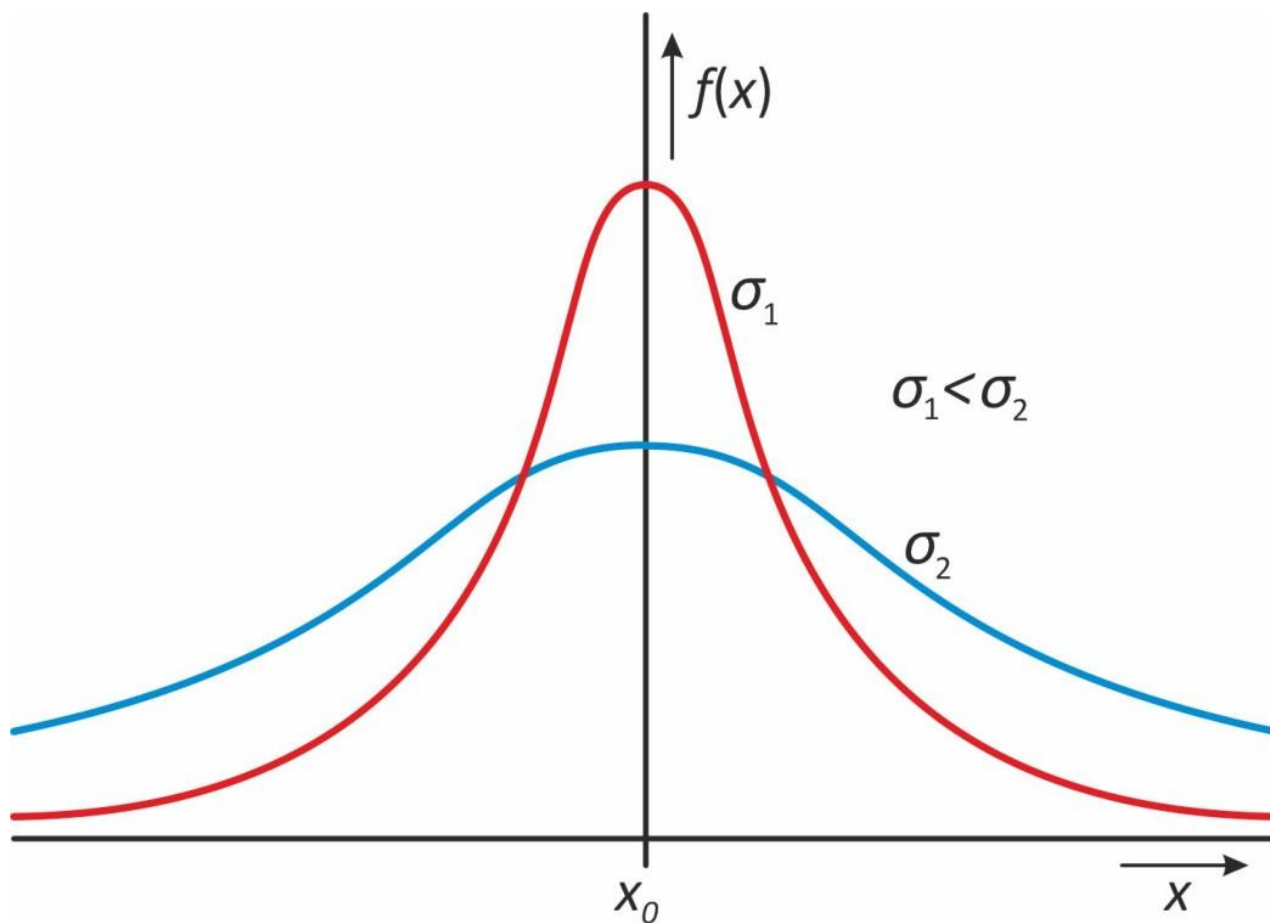
Interval výskytu měřené hodnoty	Pravděpodobnost výskytu x v intervalu
$\langle x_0 - \sigma ; x_0 + \sigma \rangle$	68,2 %
$\langle x_0 - 2\sigma ; x_0 + 2\sigma \rangle$	95,4 %
$\langle x_0 - 3\sigma ; x_0 + 3\sigma \rangle$	99,7 %



Náhodné chyby

Gaussova křivka

Velikost rozptylu σ^2 resp. směrodatné odchylky σ má vliv na tvar Gaussova rozdělení:



Náhodné chyby

Reálná situace

- Pracujeme se souborem složeným z konečného počtu změřených hodnot (tzv. **výběrový soubor**).
- Reálně nelze změřit nekonečně mnoho hodnot.
- Nelze proto určit skutečnou hodnotu x_0 .
- Lze určit pouze **nejpravděpodobnější** hodnotu – aritmetický průměr $\bar{x}$ z n změřených hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

kde:

$\bar{x}$...aritmetický průměr (výběrový)

n ...počet měření

x_i ...hodnoty měřené veličiny
($i = 1, 2, \dots, n$)

Náhodné chyby

Reálná situace

Rozptyl hodnot výběrového souboru (okolo výběrového aritmetického průměru) charakterizuje tzv. **výběrová směrodatná odchylka** jednoho měření (s).

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

kde:

s ...výběrová směrodatná odchylka jednoho měření

x_i ...hodnoty měřené veličiny ($i = 1, 2, \dots, n$) tj. hodnoty
výběrového souboru

n ...počet měření

Náhodné chyby

Reálná situace

Pro posouzení výsledků opakovaného měření je podstatná znalost odchylky výběrového průměru od skutečné hodnoty. Zavádí se proto tzv. **výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru** ($\bar{s}$).

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

kde:

$\bar{s}$...výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru

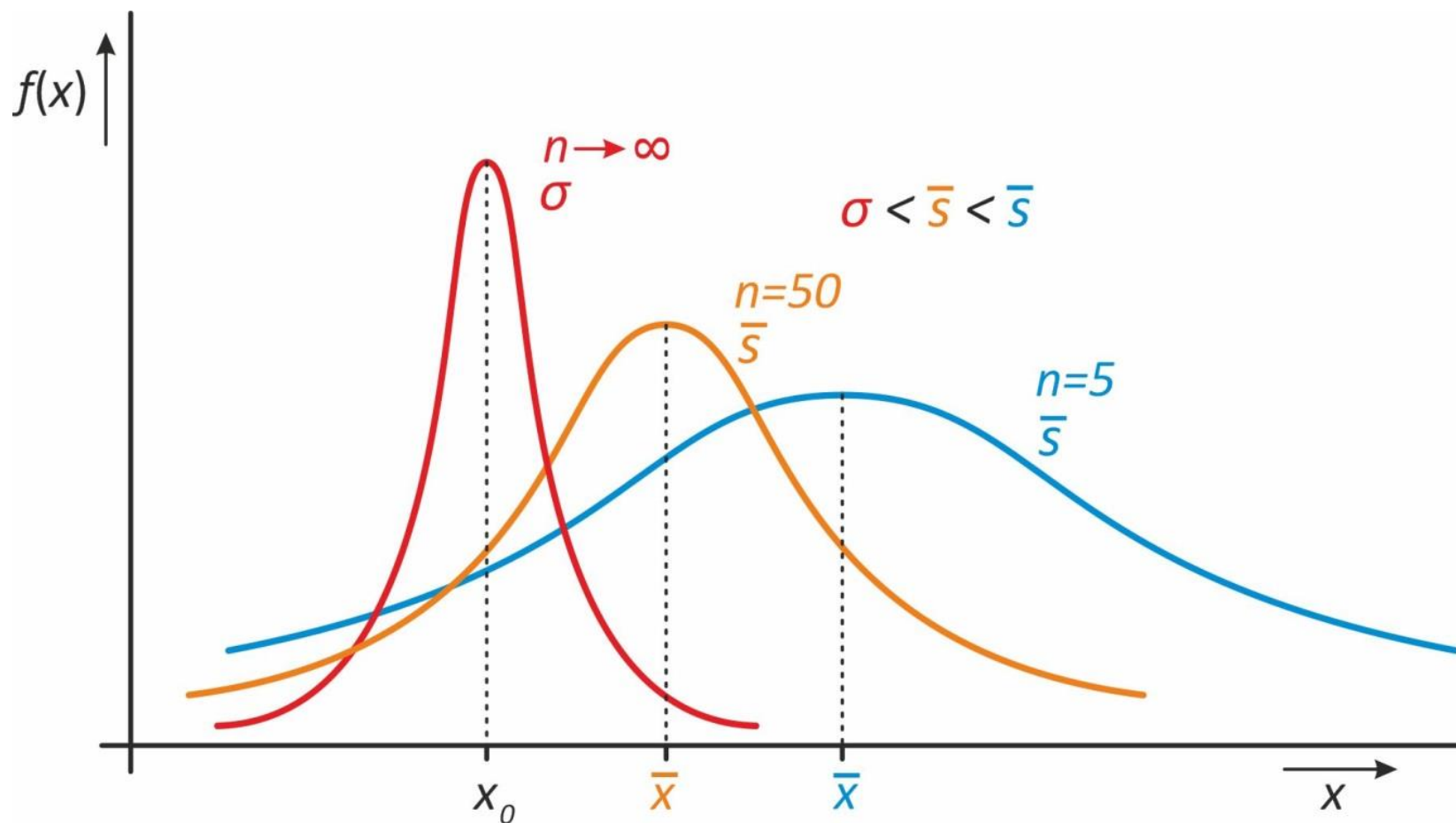
$\bar{x}$...aritmetický průměr (výběrový)

n ...počet měření

x_i ...hodnoty měřené veličiny ($i = 1, 2, \dots, n$) tj. hodnoty výběrového souboru

Náhodné chyby

Reálná situace

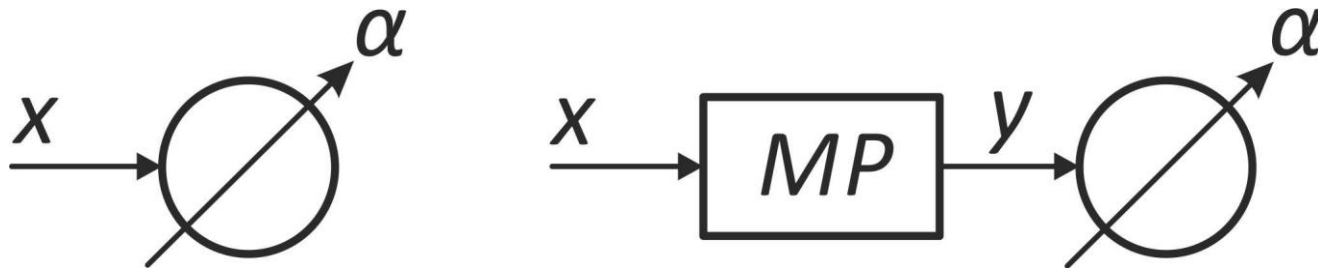


Vliv počtu měření na hodnotu aritmetického průměru $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku $\bar{s}$

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

Blokové uspořádání



MP...měřicí převodník

x ...měřená veličina

y ...veličina na výstupu měřicího převodníku

α ...výchylka ručky

α_m ...maximální výchylka ručky

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

Základní pojmy

Rozsah (R) – celkový rozsah měřitelných hodnot

Měřicí rozsah (M) – část rozsahu umožňující měření s předepsanou přesností ($M \leq R$)

Konstanta měřicího rozsahu (K) – koeficient přepočtu výchylky na měřenou hodnotu

$$K = \frac{M}{\alpha_m}$$

Citlivost (C) – poměr změny údaje přístroje a měřené veličiny

$$C = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\alpha_m}{M} \Big|_{lin. stupnice}$$

Vlastní spotřeba – výkon odebíraný z měřeného obvodu

Rozlišení – dáno dělením stupnice

Elektromechanické přístroje

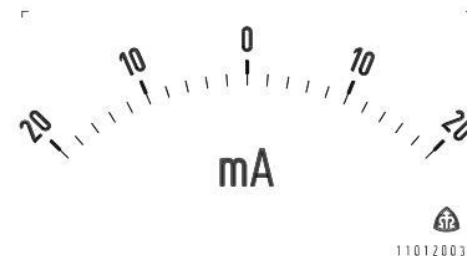
Vlastnosti a chyby



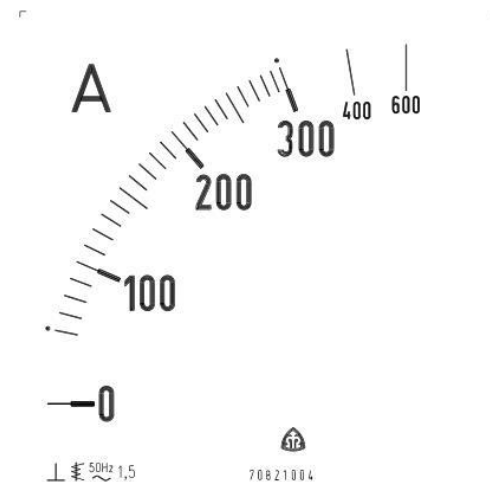
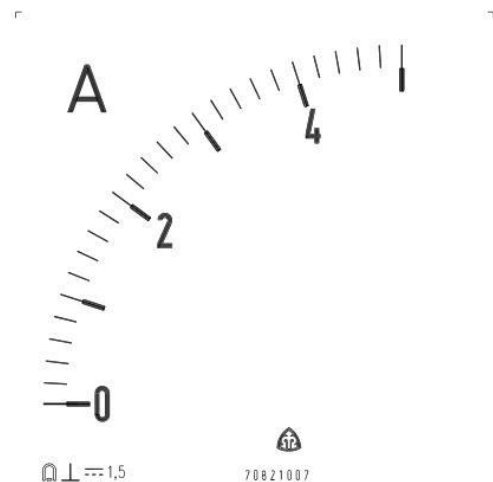
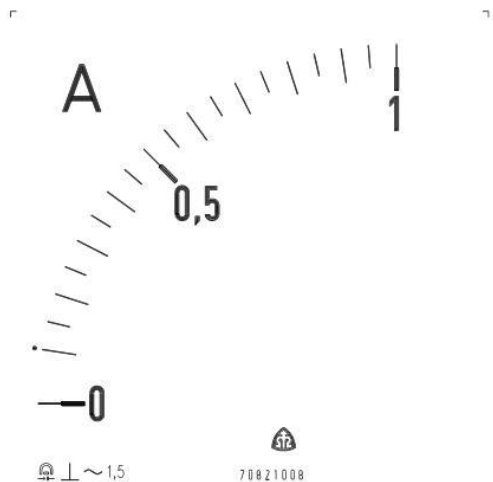
Lineární (rovnoměrná)



S potlačenou nulou



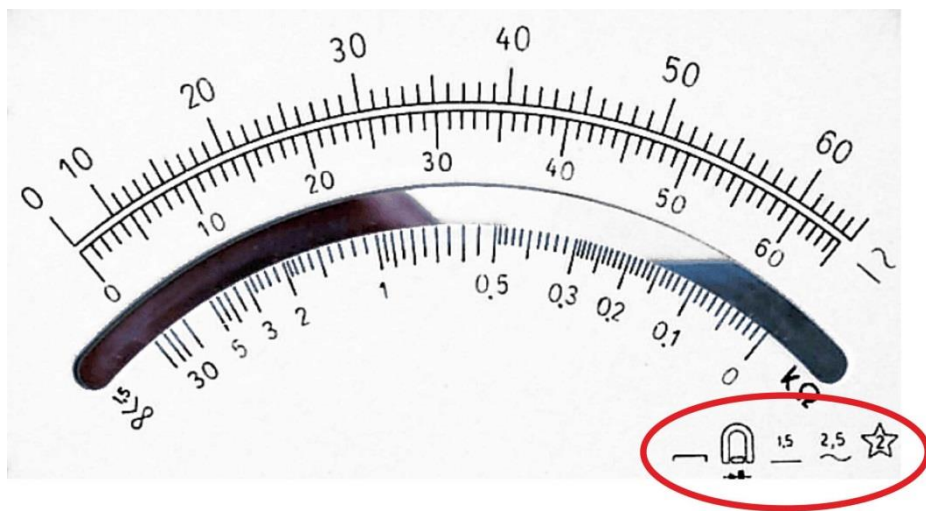
S nulou uprostřed



Příklady stupnic s různě vymezeným měřicím rozsahem

Vlastnosti a chyby

Na stupnici bývají umístěny také důležité **značky** a další doplňující **údaje** charakterizující přístroj



Značky na přístrojích

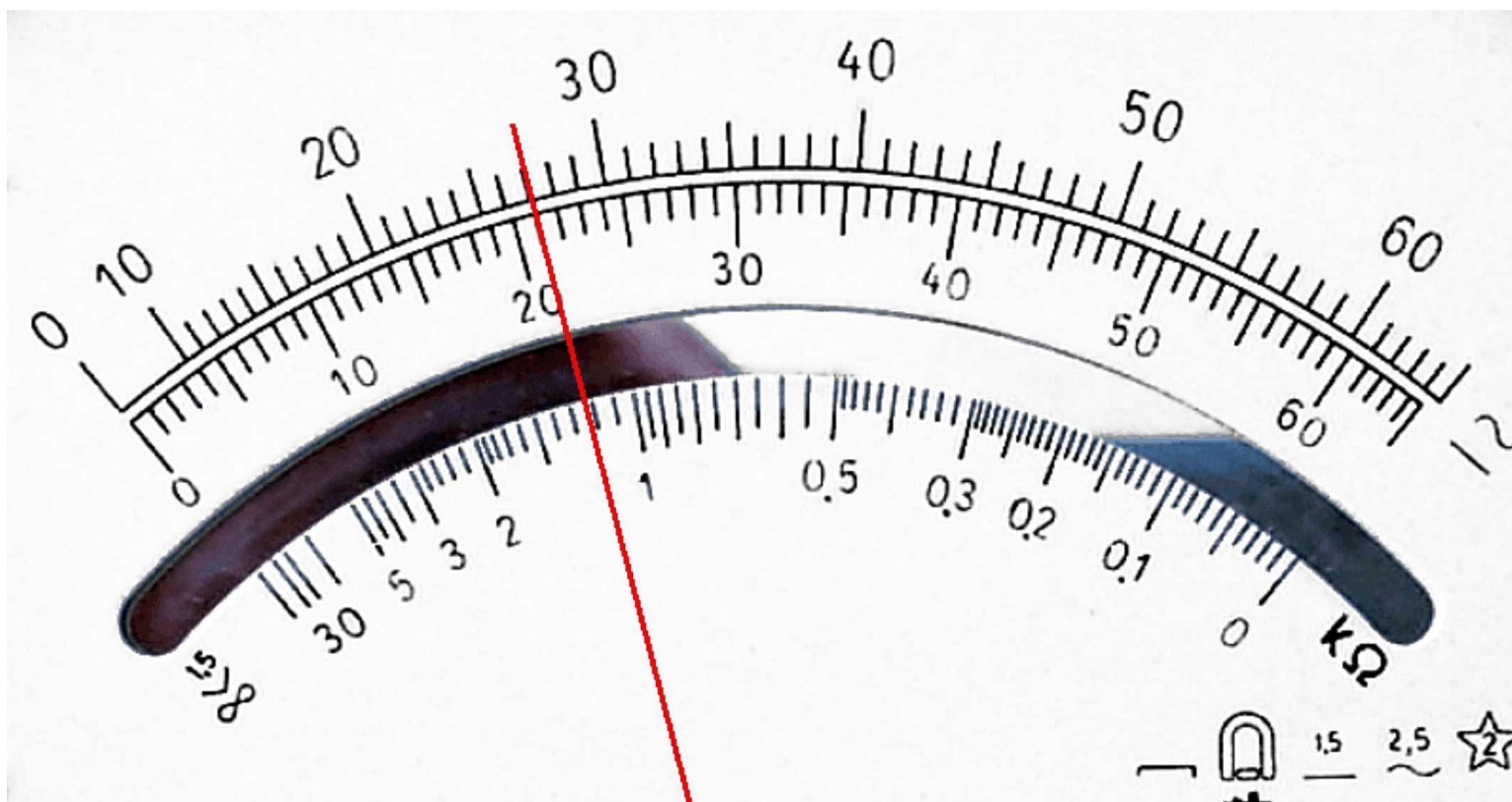


Vnitřní odpory

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

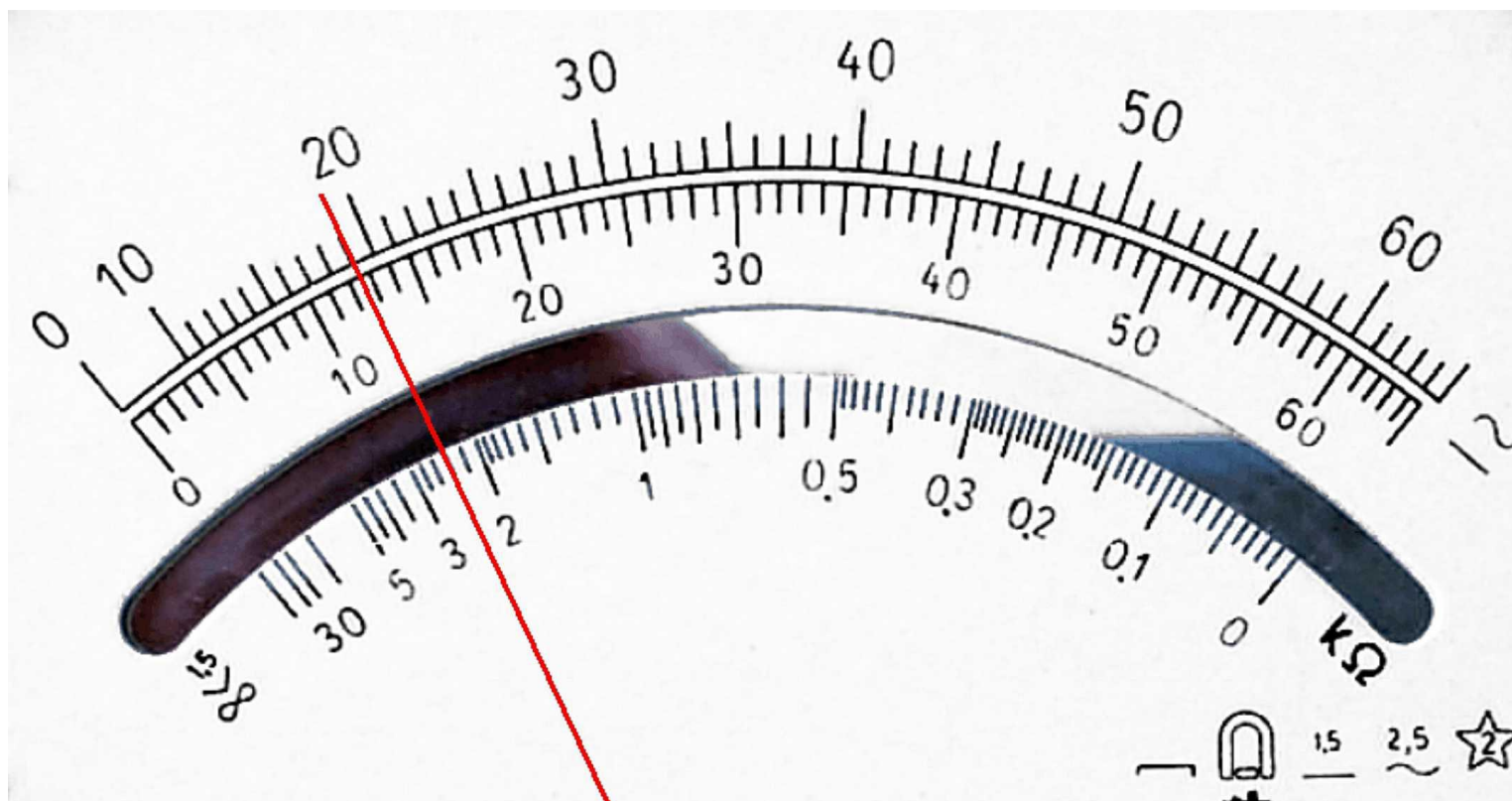
Příklad: Čtení údaje ze stupnice ručkového přístroje. Jakou hodnotu ukazuje přístroj, je-li na stejnosměrném rozsahu 60 V?



Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

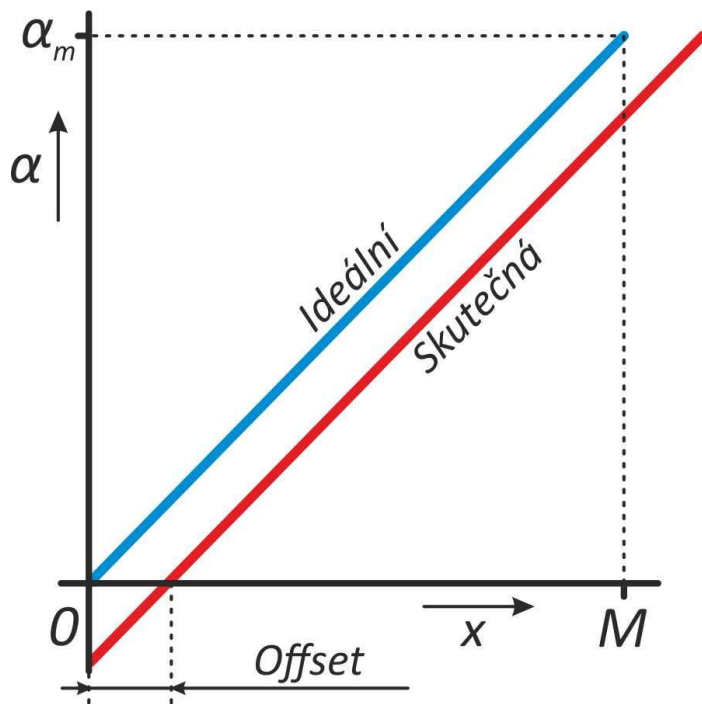
Příklad: Čtení údaje ze stupnice ručkového přístroje. Jakou hodnotu ukazuje přístroj, je-li na střídavém rozsahu 0,12 mA?



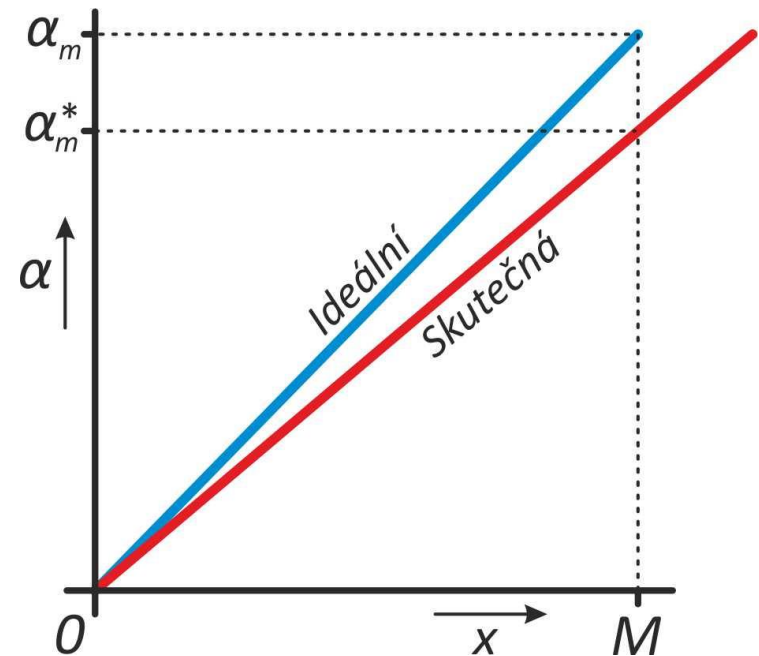
Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

- Chyba elektromechanického přístroje je udávána tzv. **třídou přesnosti** (TP).
- Na velikost TP má vliv kumulace nedokonalostí měřidla.



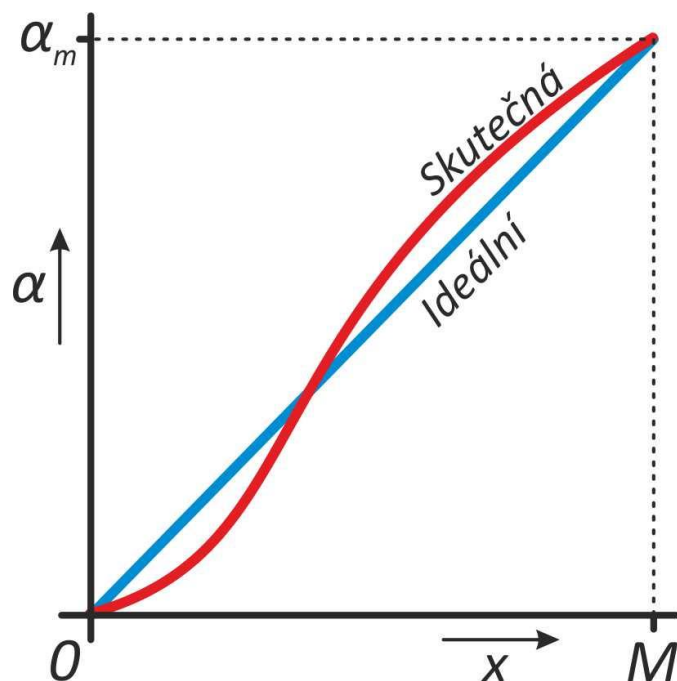
Chyba nuly



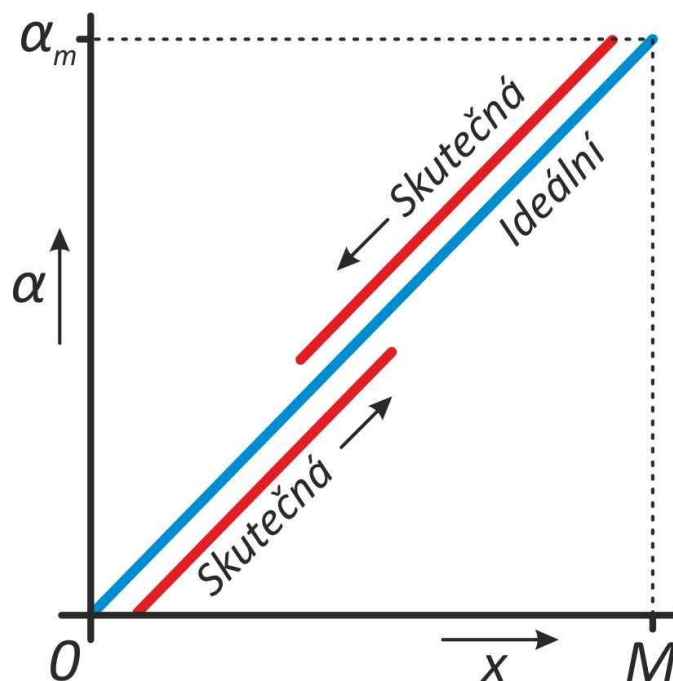
Chyba zisku

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby



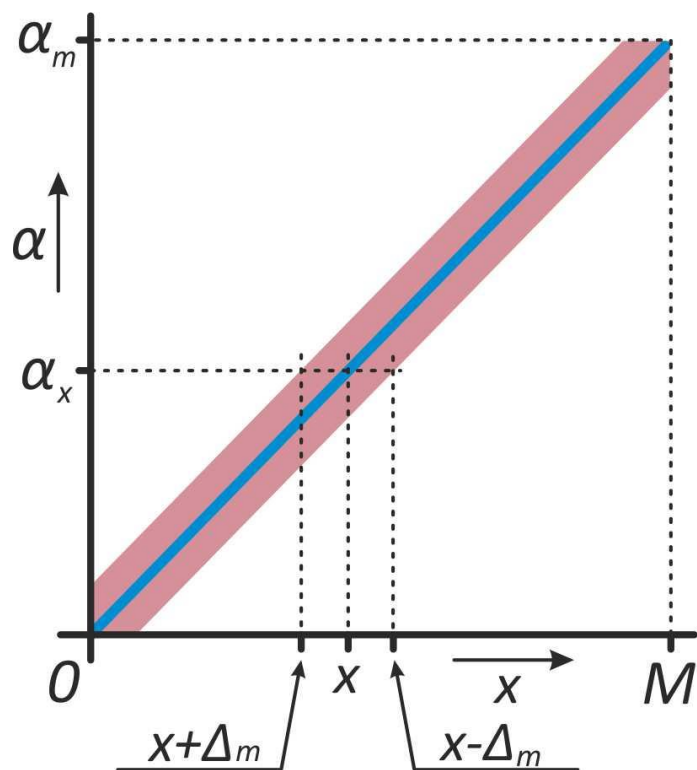
Chyba linearity



Chyba reverzibility

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby



Třída přesnosti (TP)

$$TP \doteq \frac{|\Delta_m|}{M} 100$$

kde:

M ...měřicí rozsah

Δ_m ...maximální absolutní
chyba zjištěná v rámci
měřicího rozsahu

Řada tříd přesnosti: 0,05 - 0,1 - 0,2 - 0,5 - 1 - 1,5 - 2,5 - 5

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Voltmetr má $TP=1$ a stupnici 60 d. Na rozsahu 12 V ukazoval výchylku 23 d. Určete velikost změřeného napětí a maximální absolutní chybu a relativní chybu změřené hodnoty.

$$K = \frac{M}{\alpha_m} = \frac{12}{60} = 0,2 \text{ V/d}$$

$$U = K\alpha = 0,2 \cdot 23 = \underline{4,6 \text{ V}}$$

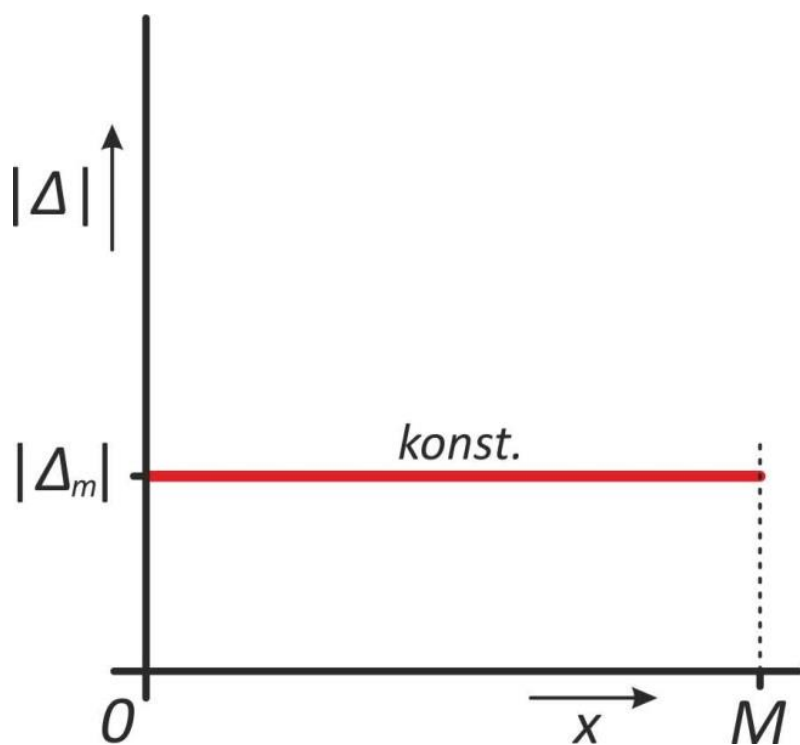
$$TP = \frac{|\Delta_m|}{M} 100 \Rightarrow \Delta_m = \pm \frac{TP M}{100} = \pm \frac{1 \cdot 12}{100} = \underline{\pm 0,12 \text{ V}}$$

$$\delta_m = \frac{\Delta_m}{U} 100 = \frac{\pm 0,12}{4,6} 100 = \underline{\pm 2,6 \%}$$

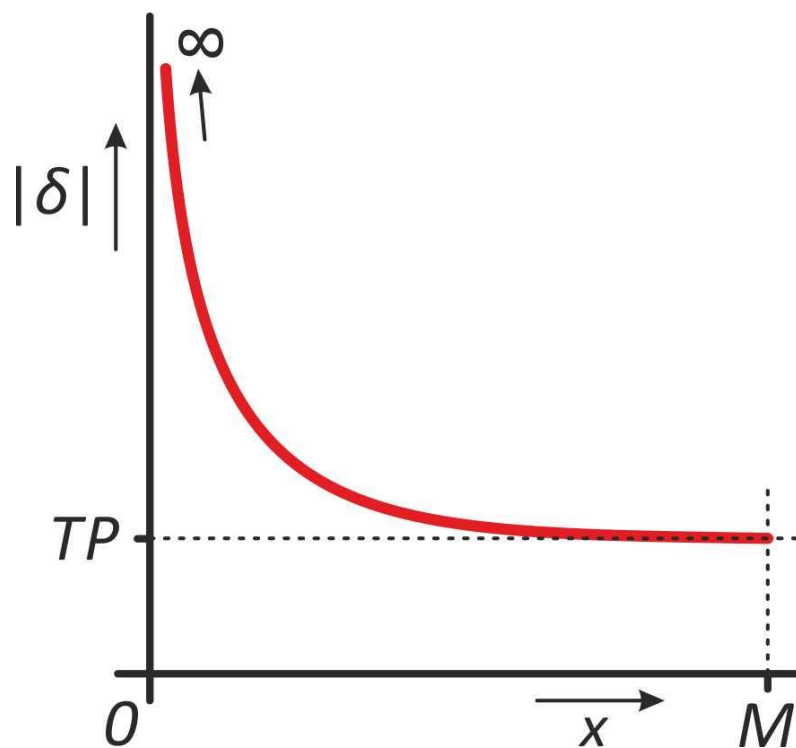
Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

Průběh chyby ručkového přístroje v závislosti na změřené hodnotě



Absolutní chyba



Relativní chyba

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Zjednodušené blokové schéma digitálního přístroje



MP ...měřicí převodník

ADC ...analogově-digitální převodník

μP ...mikropočítač

$DISP$...displej

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Základní pojmy:

Rozlišení – nejmenší změna měřené veličiny detekovatelná přístrojem na daném rozsahu

Kvantovací krok ADC – rozdíl dvou sousedních kvantovacích hladin tj. nejmenší přírůstek, který je schopen ADC detekovat

Přesnost měření – Udává se pro každý rozsah, měřenou veličinu a konkrétní nastavení přístroje zvláštním samostatným předpisem. Zpravidla má dvě složky:

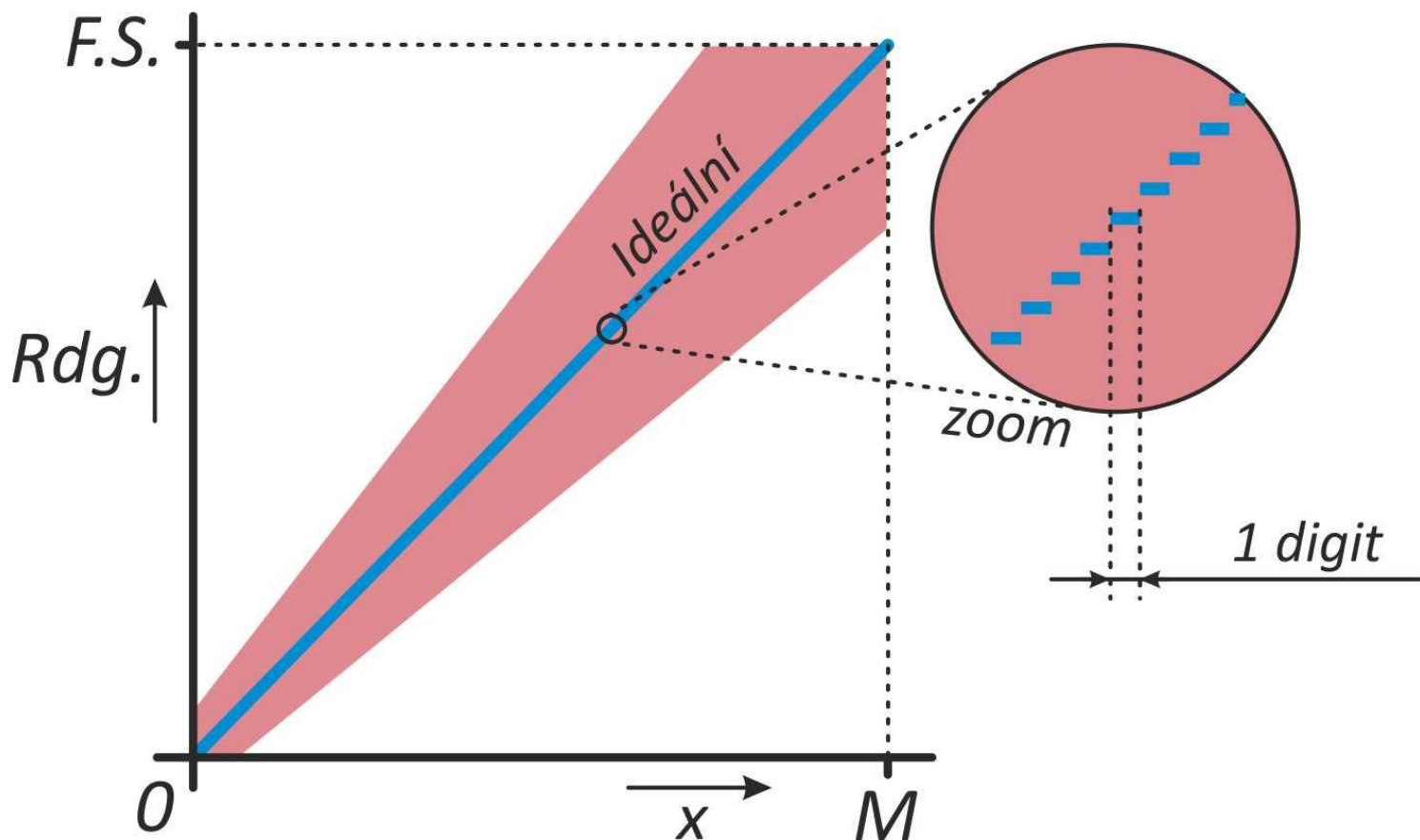
- Pohyblivá složka - chyba čtení – v procentech změřené hodnoty (δ_{Rdg})
- Pevná složka - chyba z rozsahu – v procentech z hodnoty rozsahu (δ_{FS}) popř. v tzv. **digitech** (*No. of Digits*)

Digit - váha posledního místa displeje na zvoleném rozsahu

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Výsledná převodní charakteristika je opět ovlivněna různými chybami (chyba nuly, zisku, linearity atd.).



Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Vyjádření chyby digitálního přístroje v procentech (1. způsob)

$$\Delta_x = \pm(|\Delta_{RDG}| + |\Delta_{FS}|) = \pm\left(\frac{x}{100}|\delta_{RDG}| + \frac{M}{100}|\delta_{FS}|\right)$$

kde:

$\Delta_{RDG}, \delta_{RDG}$...absolutní resp. relativní chyba čtení

Δ_{FS}, δ_{FS} ... absolutní resp. relativní chyba z rozsahu

x ...čtená (změřená) hodnota

M ...měřicí rozsah

Δ_x ...absolutní chyba změřené hodnoty

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Chyba DMM udaná v % (specifikace Agilent 34405)

DC Specifications^[1]

Table 24 DC Accuracy $\pm$ (% of reading + % of range)



Function	Range ^[2]	Test Current or Burden Voltage	Input Impedance ^[13]	1 Year	Temperature Coefficient
				23° C $\pm$ 5° C	0° C - 18° C 28° C - 55° C
DC Voltage	100.000mV	-	10M Ω $\pm$ 2%	0.025+0.008	0.0015+0.0005
	1.00000V	-	10M Ω $\pm$ 2%	0.025+0.006	0.0010+0.0005
	10.0000V	-	10.1M Ω $\pm$ 2%	0.025+0.005	0.0020+0.0005
	100.000V	-	10.1M Ω $\pm$ 2%	0.025+0.005	0.0020+0.0005
	1000.00V	-	10M Ω $\pm$ 2%	0.025+0.005	0.0015+0.0005
Resistance	100.000 Ω	1.0mA	-	0.05+0.008 ^[3]	0.0060+0.0008
	1.00000k Ω	0.83mA	-	0.05+0.005 ^[3]	0.0060+0.0005
	10 0000k Ω	100 μ A	-	0.05+0.006 ^[3]	0.0060+0.0005

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Vyjádření chyby DMM v procentech a digitech (2. způsob)

$$\Delta_x = \pm(|\Delta_{RDG}| + |\Delta_{FS}|) = \pm \left(\frac{x}{100} |\delta_{RDG}| + DIGS \cdot VPM \right)$$

kde:

Δ_{RDG} , δ_{RDG} ...absolutní resp. relativní chyba čtení

Δ_{FS} , δ_{FS} ... absolutní resp. relativní chyba z rozsahu

x ...čtená (změřená) hodnota

$DIGS$...počet digitů

VPM ...váha posledního místa

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Chyba DMM udaná v % a digitech (spec. Escort 3136A)

- DC Current

Resolution, Full Scale Reading and Accuracy



Range	Resolution	Full Scale Reading	Accuracy (1 year)	Burden Voltage ⁽¹⁾ & Shunt Resistor
500μA	10nA	510.00	0.05% + 5	<0.06V / 100Ω
5mA	100nA	5.1000	0.05% + 4	<0.6V / 100Ω
50mA	1μA	51.000	0.05% + 4	<0.08V / 1Ω
500mA	10μA	510.00	0.05% + 4	<0.8V / 1Ω
5A	100μA	5.1000	0.25% + 5	<0.3V / 0.01Ω
10A	1mA	20.000 ⁽²⁾	0.25% + 5	<0.6V / 0.01Ω

⁽¹⁾ Typical at full scale reading and voltage across the input terminals

⁽²⁾ In 10A range, >10~20A_{dc} is readable for 20 seconds maximum with audio warning.

- Response Time: Approximately 1.0 second when the displayed reading reaches 99.9% dc value of the tested input signal at the same range.

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Multimetrem Agilent 34405 bylo na rozsahu 10 V změřeno stejnosměrné napětí 7,31 V. Určete absolutní a procentní chybu měření (specifikace multimetru viz výše).

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \pm(|\Delta_{RDG}| + |\Delta_{FS}|) = \pm\left(\frac{x}{100}|\delta_{RDG}| + \frac{M}{100}|\delta_{FS}|\right) = \\ &= \pm\left(\frac{7,31}{100}0,025 + \frac{10}{100}0,005\right) = \pm 0,0023275 \text{ V} \doteq \underline{\pm 2,3 \text{ mV}} \\ \delta_x &= \frac{\Delta_x}{x} 100 = \frac{\pm 0,0023}{7,23} 100 \doteq \underline{\pm 0,032 \%}\end{aligned}$$

Pozn.: Chyba je příliš pesimistický údaj. Dnes se uvádí častěji nejistota (viz dále).

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Multimetrem Escort 3136A byl na rozsahu 5 mA změřen stejnosměrný proud 2,16 mA. Určete absolutní a procentní chybu měření (specifikace multimetru viz výše).

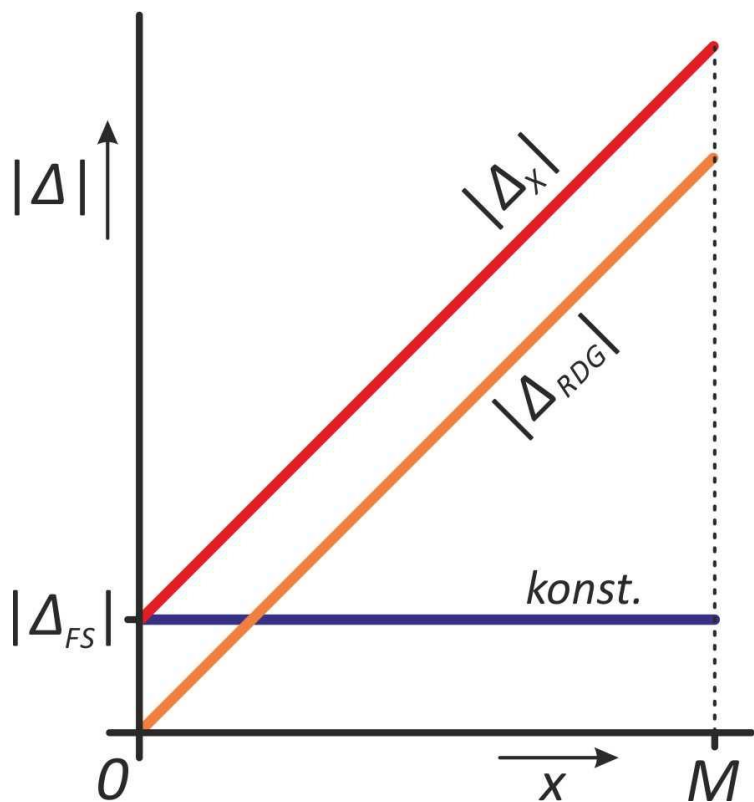
$$\begin{aligned}\Delta_x &= \pm(|\Delta_{RDG}| + |\Delta_{FS}|) = \pm\left(\frac{x}{100}|\delta_{RDG}| + DIGS \cdot VPM\right) = \\ &= \pm\left(\frac{2,16}{100}0,05 + 4 \cdot 0,0001\right) = \pm 0,00148 \text{ mA} \doteq \underline{\pm 1,5 \text{ }\mu\text{A}} \\ \delta_x &= \frac{\Delta_x}{x} 100 = \frac{\pm 0,0015}{2,16} 100 \doteq \underline{\pm 0,069 \%}\end{aligned}$$

Pozn.: Chyba je příliš pesimistický údaj. Dnes se uvádí častěji nejistota (viz dále).

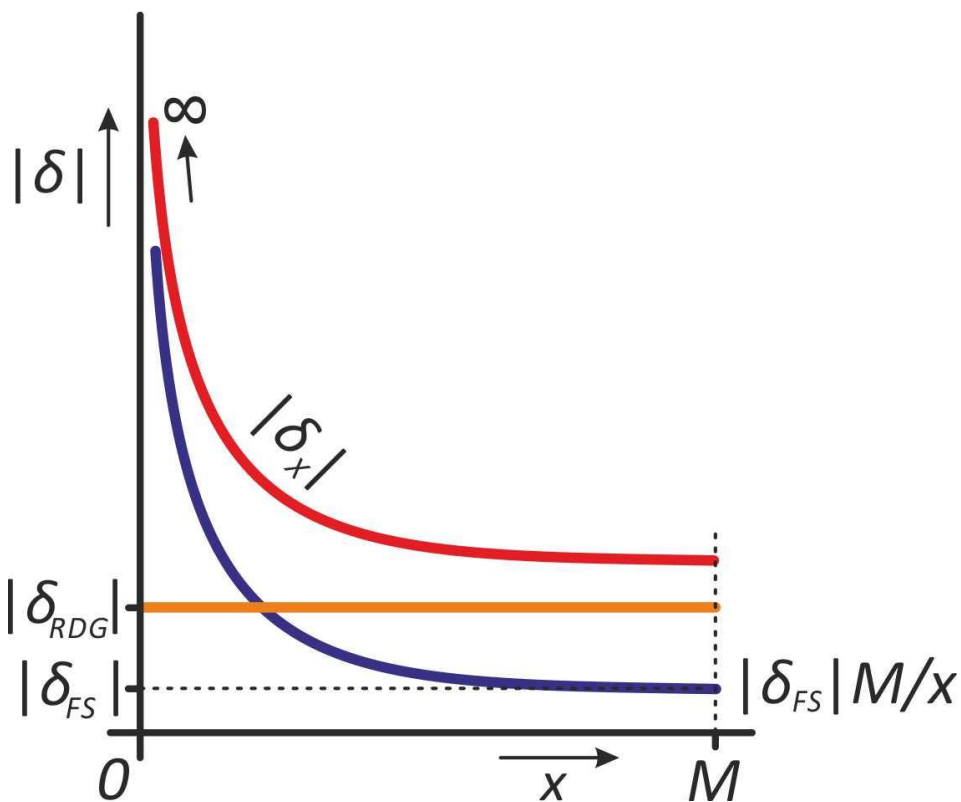
Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Průběh chyby digitálního přístroje v závislosti na změřené hodnotě:



Absolutní chyba



Relativní chyba

Chyby nepřímých měření

Pokud je výsledek měření určen výpočtem z více měřených hodnot je potřeba brát v úvahu šíření chyb ve výpočtu.

$$y = f(x_1, x_2)$$

Δ_1, Δ_2 ...absolutní chyby proměnných x_1 resp. x_2

δ_1, δ_2 ... relativní chyby proměnných x_1 resp. x_2

y ...výsledná hodnota

Δ_y ...absolutní chyba výsledku y

δ_y ...relativní chyba výsledku y

Jak určíme hodnotu chybu výsledku v závislosti na tvaru funkce f ?

Chyby nepřímých měření

Operace	Absolutní chyba	Relativní chyba
$y = x_1 + x_2$	$ \Delta_y = \Delta_1 + \Delta_2 $	$ \delta_y = \frac{ \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 }{ x_1 + x_2 }$
$y = x_1 - x_2$	$ \Delta_y = \Delta_1 + \Delta_2 $	$ \delta_y = \frac{ \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 }{ x_1 - x_2 }$
$y = x_1 x_2$	$ \Delta_y = \Delta_1 x_2 + \Delta_2 x_1 $	$ \delta_y = \delta_1 + \delta_2 $
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$ \Delta_y = \frac{ \Delta_1 x_2 + \Delta_2 x_1 }{x_2^2}$	$ \delta_y = \delta_1 + \delta_2 $

Chyby nepřímých měření

Operace	Absolutní chyba	Relativní chyba
$y = nx_1$	$ \Delta_y = n \Delta_1 $	$ \delta_y = \delta_1 $
$y = x_1^n$	$ \Delta_y = nx_1^{(n-1)} \Delta_1 $	$ \delta_y = n \delta_1 $

Obecný případ:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad |\Delta_y| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| |\Delta_i|$$

Chyby nepřímých měření

Příklad: Ohmovou metodou byl měřen odpor. Voltmetr naměřil 10 V s chybou $\pm 0,1$ V. Ampérmetr naměřil 1 A s chybou $\pm 0,01$ A. Určete velikost odporu a absolutní a procentní chybu výsledku.

$$U_V = 10 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V} \Rightarrow |\Delta_V| = 0,1 \text{ V} \qquad R = \frac{U_V}{I_A} = \frac{10}{1} = 10 \, \Omega$$

$$I_A = 1 \text{ A} \pm 0,01 \text{ A} \Rightarrow |\Delta_A| = 0,01 \text{ A}$$

$$|\delta_R| = |\delta_V| + |\delta_A| = \frac{|\Delta_V|}{U_V} 100 + \frac{|\Delta_A|}{I_A} 100 = \frac{0,1}{10} 100 + \frac{0,01}{1} 100 =$$
$$= 2 \Rightarrow \delta_R = \underline{\pm 2 \%}$$

$$|\delta_R| = \frac{|\Delta_R|}{R} 100 \Rightarrow |\Delta_R| = \frac{|\delta_R| R}{100} = \frac{2 \cdot 10}{100} = 0,2 \Rightarrow \Delta_R = \underline{\pm 0,2 \, \Omega}$$

Nejistoty měření

Definice

- **Nejistota** = parametr přiřazený k výsledku měření, udávající interval kolem výsledku měření, v němž se s jistou (přesně danou pravděpodobností) nachází skutečná hodnota x_0 .
- Nejistota kombinuje statistický přístup zohledňující opakované měření, vlastnosti použitých měřidel a podmínky měření.
- **Existují dva základní typy nejistot: A, B**
 $u_A(x)$...standardní **nejistota typu A**
 $u_B(x)$...standardní **nejistota typu B**
- **Kombinací nejistot typu A a B vzniká:**
 $u_C(x)$...standardní **kombinovaná nejistota**
 $U(x)$...**rozšířená nejistota**

Standardní nejistota typu A

- Je způsobena náhodnými jevy – Gaussovo rozdělení.
- Příčiny vzniku jsou neznámé.
- Stanovuje se statistickou analýzou souboru opakovaných měření.
- Hodnota nejistoty typu A klesá s opakováním měření.

Definice: Standardní nejistota typu A výběrového souboru hodnot je směrodatná odchylka $\bar{s}$ aritmetického průměru $\bar{x}$ (násobená případně korekčním koeficientem k_s).

$$u_A(x) = k_s \bar{s} = k_s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad \text{kde} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

x_i ...hodnota vzorku výběrového souboru

n ...počet měření

k_s ...korekční koeficient (pro $n \geq 10$ je $k_s = 1$, pro $n < 10$ viz tab.)

n	9	8	7	6	5	4	3	2
k_s	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,7	2,3	7,0

Standardní nejistota typu A

Příklad: Určete odhad měřeného napětí a rozšířenou nejistotu typu A ($k_r = 2$) pro 9 změřených hodnot napětí: 8,21 V; 8,26 V; 8,24 V; 8,30 V; 8,27 V; 8,26 V; 8,25 V; 8,24 V; 8,26 V.

- Odhad měřeného napětí:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i = \frac{1}{9} (8,21 + 8,26 + 8,24 + \dots + 8,26) = 8,25 \text{ V}$$

- Nejistota typu A:

$$u_A(U) = k_s \bar{s} = k_s \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} = \left| \begin{array}{l} \text{pro } n = 9 \text{ je} \\ k_s = 1,2 \end{array} \right| =$$

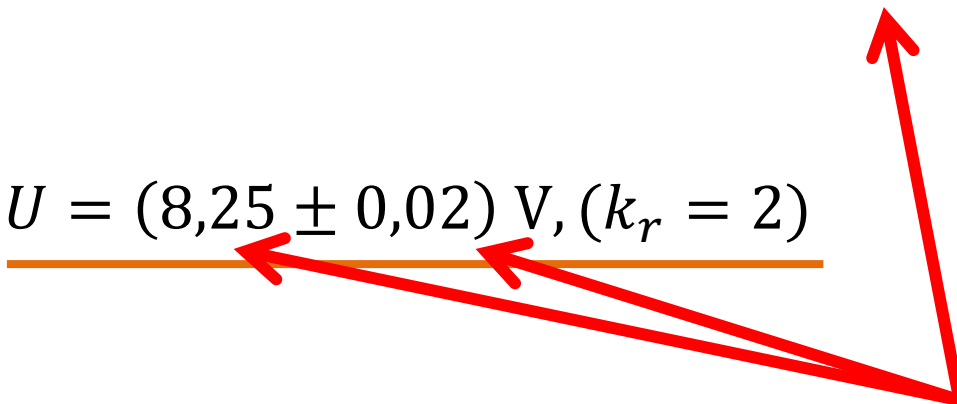
Standardní nejistota typu A

$$= 1,2 \sqrt{\frac{1}{9(9-1)} [(8,21 - 8,254)^2 + (8,26 - 8,254)^2 + \dots + (8,26 - 8,254)^2]} =$$
$$= 0,00982 \text{ V}$$

- Rozšířená nejistota typu A:

$$U_A(x) = k_r u_A(U) = 2 \cdot 0,00982 = 0,0196 \text{ V}$$

- Změřené napětí:

$$\underline{U = (8,25 \pm 0,02) \text{ V}, (k_r = 2)}$$


Pozn: Výsledná nejistota se zaokrouhluje na stejný počet míst, kolik má výsledek (viz příklad).

Standardní nejistota typu B

- Příčiny vzniku jsou známé a odhadnutelné (nedokonalosti měřidel – chyby a tolerance, přesnosti použitých konstant, podmínky měření – např. vliv oteplení mimo vztažné podmínky,...).
- Získávají se jiným způsobem než ze statistického vyhodnocení souboru měření.

Obecný postup určení nejistoty typu B:

- 1) Definovat zdroje nejistot z_k působící na měřenou veličinu x .
- 2) Určit vztah mezi veličinou x a zdroji nejistot

$$x = f(z_1, z_2, \dots, z_p)$$

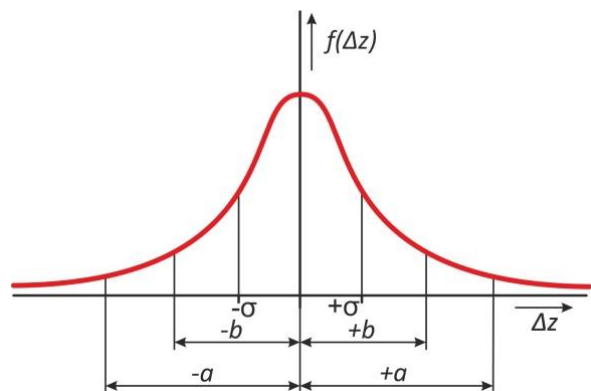
- 3) Pro každý zdroj nejistoty z_k se určí mezní odchylky Δz_{kmax} k -tého zdroje nejistoty.

Standardní nejistota typu B

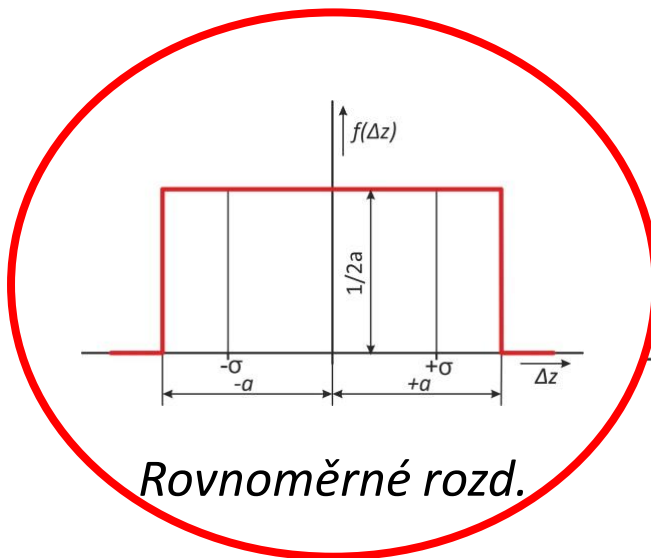
- 4) Ke každému zdroji nejistoty z_k se určí pravděpodobnostní rozdělení a odpovídající dělicí koeficient χ . Ve většině případů uvažujeme rovnoměrné rozdělení tj. $\chi = \sqrt{3}$.

Typ rozdělení	Mezní odchylka (Δz_{kmax})	Dělicí koeficient χ
Normální	a	3
	b	2
Rovnoměrné (pravoúhlé)	a	$\sqrt{3}$
Trojúhelníkové-Simpsonovo	a	$\sqrt{6}$
Bimodální-trojúhelníkové	a	$\sqrt{2}$
Lichoběžníkové	$a, \quad b = a/3$	2,32
	$a, \quad b = a/2$	2,19
	$a, \quad b = 2a/3$	2,04
Bimodální-Diracovo	a	1

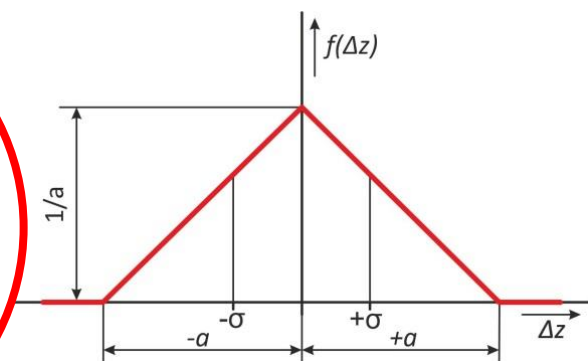
Standardní nejistota typu B



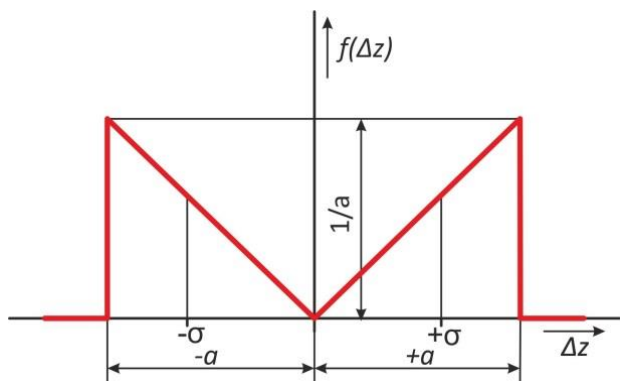
Normální rozd.



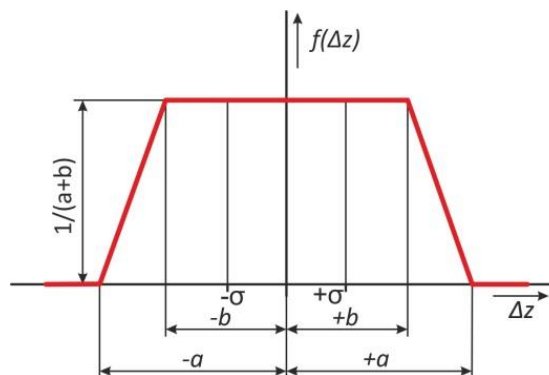
Rovnoměrné rozd.



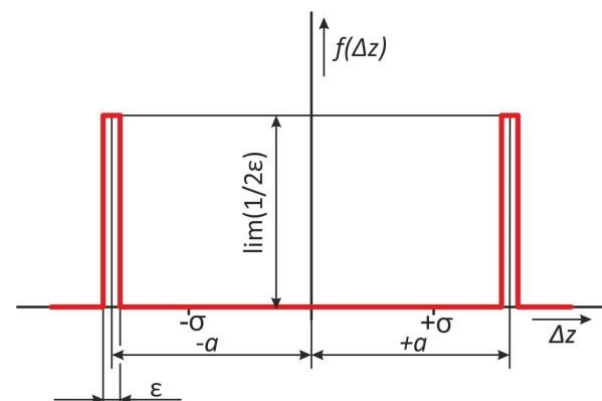
Trojúhelníkové rozd.



Bimodální-trojúhelníkové



Lichoběžníkové



Bimodální-Diracovo

Standardní nejistota typu B

5) Stanoví se dílčí nejistoty pro jednotlivé zdroje z_k .

$$u_B(z_k) = \frac{\Delta z_{kmax}}{\chi}$$

6) Vyčíslí se celková standardní nejistota typu B (zákon šíření nejistot)

$$u_B(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^p [A_k u_B(z_k)]^2} \quad kde \quad A_k = \frac{\partial f(z_1, z_2, \dots, z_p)}{\partial z_k}$$

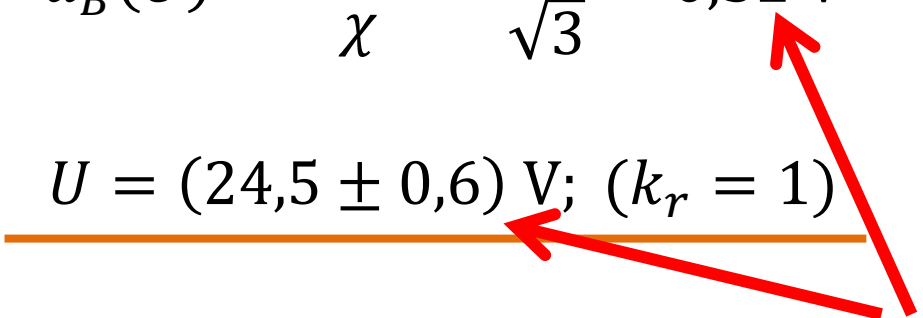
A_k ...citlivostní koeficient k -tého zdroje z_k .

Standardní nejistota typu B

Příklad: Ručkovým V-metrem s třídou přesnosti 1,5 bylo na rozsahu 60 V změřeno napětí 24,5 V. Určete nejistotu typu B.

$$TP = \frac{|\Delta_m|}{M} 100 \quad \rightarrow \quad |\Delta_m| = \frac{TP \cdot M}{100} = \frac{1,5 \cdot 60}{100} = 0,9 \text{ V}$$

$$u_B(U) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{0,9}{\sqrt{3}} = 0,52 \text{ V}$$

$$U = (24,5 \pm 0,6) \text{ V}; (k_r = 1)$$


Pozn: Nejistoty se zaokrouhlují vždy nahoru (viz příklad).

Standardní nejistota typu B

Příklad: Digitálním V-metrem bylo na rozsahu 200 V změřeno napětí 153,27 V. V manuálu přístroje je udána chyba $\pm 0,01\%$ rdg a $\pm 0,02\%$ F.S. Jaká je nejistota (typu B) změřeného údaje.

$$\begin{aligned} |\Delta_m| &= \left(\frac{U}{100} \%rdg + \frac{M}{100} \%F.S. \right) = \\ &= \frac{153,27}{100} 0,01 + \frac{200}{100} 0,02 = 0,055 \text{ V} \end{aligned}$$

$$u_B(U) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{0,055}{\sqrt{3}} = 0,032 \text{ V}$$

$$U = (153,27 \pm 0,04) \text{ V}; (k_r = 1)$$

Kombinovaná nejistota

- Vznikne kombinací nejistot typu A a B:

$$u_c(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}$$

- Rozšířená nejistota $U(x)$

$$U(x) = k_r u_c(x)$$

kde:

$k_r \in \langle 2; 3 \rangle$...koeficient rozšíření

- Většinou se volí $k_r = 2$.

(Odpovídá cca 95% pokrytí resp.

pravděpodobnosti výskytu v případě normálního rozdělení.)

- Koeficient k_r je vždy potřeba uvést k výsledku spolu s nejistotou.

k_r	Pokrytí
1	68,27
2	95,45
2,58	99,00
3	99,73

Kombinovaná nejistota

Příklad: Digitálním 3,5-místným V-metrem bylo na rozsahu 20 V změřeno 9 hodnot napětí: 8,21 V; 8,26 V; 8,24 V; 8,30 V; 8,27 V; 8,26 V; 8,25 V; 8,24 V; 8,26 V. Manuál přístroje udává pro daný rozsah chybu: $\pm 0,1\% \text{rdg}$ a ± 6 digitů. Určete rozšířenou nejistotu ($k = 2$) měřeného napětí.

- Odhad měřeného napětí:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i = \frac{1}{9} (8,21 + 8,26 + 8,24 + \dots + 8,26) = 8,25 \text{ V}$$

- Nejistota typu A:

$$u_A(U) = k_s \bar{s} = k_s \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} = \left| \begin{array}{l} \text{pro } n = 9 \text{ je} \\ k_s = 1,2 \end{array} \right| =$$

Kombinovaná nejistota

$$= 1,2 \sqrt{\frac{1}{9(9-1)} [(8,21 - 8,254)^2 + (8,26 - 8,254)^2 + \dots + (8,26 - 8,254)^2]} =$$
$$= 0,00982 \text{ V}$$

- Chyba údaje:

$$|\Delta_m| = \left(\frac{U}{100} \%rdg + digs \cdot VPM \right) = \frac{8,254}{100} 0,1 + 6 \cdot 0,01 =$$
$$= 0,068 \text{ V}$$

- Nejistota typu B:

$$u_B(U) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{0,068}{\sqrt{3}} = 0,039 \text{ V}$$

Kombinovaná nejistota

- Kombinovaná nejistota:

$$u_c(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = \sqrt{0,00982^2 + 0,039^2} = 0,04 \text{ V}$$

- Rozšířená nejistota:

$$U(U) = k_r u_c(U) = 2 \cdot 0,04 = 0,08 \text{ V}$$

- Změřené napětí:

$$\underline{U = (8,25 \pm 0,08) \text{ V}; } (k_r = 2)$$

Nejistoty nepřímých měření

Pokud je měřená veličina Y počítána pomocí funkční závislosti m veličin X_j získaných přímým měřením resp. odhad výsledné hodnoty y je počítán funkční závislostí m odhadů hodnot x_i .

$$Y = f(X_1; X_2; \dots; X_m) \text{ resp. } y = f(x_1; x_2; \dots; x_m)$$

pak se výsledná kombinovaná nejistota $u_c(y)$ odhadu y určí z kombinovaných nejistot $u_c(x_j)$ jednotlivých odhadů x_j .

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m [A_j u_c(x_j)]^2} \quad kde \quad A_j = \frac{\partial f(x_1; x_2; \dots; x_m)}{\partial x_j}$$

A_j ...citlivostní koeficient j -tého odhadu x_j .

Pozn.: Předpokladem je, že vstupní veličiny jsou **nekorelované** (jinak je nutné stanovit kovariance a korelační koeficienty).

Nejistoty nepřímých měření

Příklad: Ohmovou metodou byl měřen odpor rezistoru. Proud byl měřen digitálním multimetrem na rozsahu 3 A ($\pm 0,02\% \text{rdg}$ a $\pm 0,5\% \text{F.S.}$). Napětí bylo měřeno digitálním multimetrem na rozsahu 20 V ($\pm 0,01\% \text{rdg}$ a $\pm 0,02\% \text{F.S.}$). Určete odpor rezistoru a jeho rozšířenou nejistotu ($k_r = 2$). Měření bylo provedeno celkem 10x viz tabulka hodnot.

Č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I \text{ (A)}$	1,001	1,021	1,001	0,999	1,000	1,005	1,001	1,022	1,001	0,999
$U \text{ (V)}$	10,010	10,023	10,000	9,981	9,999	10,012	10,001	10,021	10,001	9,999

- Odhad měřeného proudu:

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = \frac{1}{10} (1,001 + 1,021 + \dots + 0,999) = 1,005 \text{ A}$$

Nejistoty nepřímých měření

- Nejistota proudu typu A:

$$u_A(I) = k_s \bar{s} = k_s \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} = \left| \begin{array}{l} \text{pro } n = 10 \text{ je} \\ k_s = 1 \end{array} \right| =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{10(10-1)} [(1,001 - 1,005)^2 + \dots + (0,999 - 1,005)^2]} =$$
$$= 0,0028 \text{ A}$$

- Nejistota proudu typu B:

$$u_B(I) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1,005}{100} 0,02 + \frac{3}{100} 0,5 \right) = 0,0098 \text{ A}$$

- Kombinovaná nejistota proudu:

$$u_C(I) = \sqrt{u_A^2(I) + u_B^2(I)} = \sqrt{0,0028^2 + 0,0098^2} = 0,01 \text{ A}$$

Nejistoty nepřímých měření

- Odhad měřeného napětí:

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i = \frac{1}{10} (10,01 + 10,023 + \dots + 9,999) = 10,0047 \text{ V}$$

- Nejistota napětí typu A:

$$\begin{aligned} u_A(U) &= k_s \bar{s} = k_s \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} = \left| \begin{array}{l} \text{pro } n = 10 \text{ je} \\ k_s = 1 \end{array} \right| = \\ &= \sqrt{\frac{1}{10(10-1)} [(10,01 - 10,0047)^2 + \dots + (9,999 - 10,0047)^2]} = \\ &= 0,0039 \text{ V} \end{aligned}$$

Nejistoty nepřímých měření

- Nejistota napětí typu B:

$$u_B(U) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{10,0047}{100} 0,01 + \frac{20}{100} 0,02 \right) = 0,0029 \text{ V}$$

- Kombinovaná nejistota napětí:

$$u_C(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = \sqrt{0,0039^2 + 0,0029^2} = 0,0049 \text{ V}$$

- Výsledný odpor:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10,0047}{1,005} = 9,955 \text{ } \Omega$$

- Výsledná kombinovaná nejistota odporu:

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m [A_j u_C(x_j)]^2} \quad \text{kde} \quad A_j = \frac{\partial f(x_1; x_2; \dots; x_m)}{\partial x_j}$$

Nejistoty nepřímých měření

$$\begin{aligned} u_c(R) &= \sqrt{\left[\frac{\partial R}{\partial U} u_c(U)\right]^2 + \left[\frac{\partial R}{\partial I} u_c(I)\right]^2} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I} \\ \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{-U}{I^2} \end{array} \right| = \sqrt{\left[\frac{1}{I} u_c(U)\right]^2 + \left[\frac{-U}{I^2} u_c(I)\right]^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{1,005} 0,0049\right)^2 + \left(\frac{-10,0047}{1,005^2} 0,01\right)^2} = 0,01 \, \Omega \end{aligned}$$

- Výsledná rozšířená nejistota odporu:

$$U(R) = k_r u_c(R) = 2 \cdot 0,01 = 0,02 \, \Omega$$

$$\underline{R = (9,955 \pm 0,020) \, \Omega; (k_r = 2)}$$

Literatura

- [1] Haasz V. a kol.: Elektrická měření - přístroje a metody, ČVUT, 2018.
- [2] ÚNMZ: Pokyn pro vyjadřování nejistot měření, Sborníky technické harmonizace 2012
<http://www.unmz.cz>
- [3] Bartušek K., Gescheidtová E., Kubásek R., Mikulka J., Rez J., Steinbauer M., Měření v elektrotechnice, skriptu VUT Brno
- [4] Zuth D., Vdoleček F.: Zdroje nejistot ve vibrodiagnostice, Automa 6/2010
- [5] Tůmová O.: Metrologie a hodnocení procesů. BEN, Praha, 2009
- [6] Tůmová O., Panc T.: Možnosti vyjádření přesnosti měření I: teoretický základ, Automa 7/2013
- [7] Tůmová O.: Nejistoty měření v teorii a praxi, seminář ČSJ, Praha 15.3.2012, www.csq.cz
- [8] Drechsler R., Gyarfáš J., Jakl M., Vítovec J.: Elektrická měření II – Základní metody, SNTL/ALFA 1973
- [9] Fajt V.: Elektrická měření, SNTL/ALFA 1987