



11 Cvičení 11 - Věta o změně toku hybnosti

Druhý Newtonův zákon tvrdí, že *časová změna hybnosti je rovna síle*:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

kde hybnost $\vec{p} = m\vec{u}$, tedy

$$\frac{dm\vec{u}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{u} + m\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}. \quad (2)$$

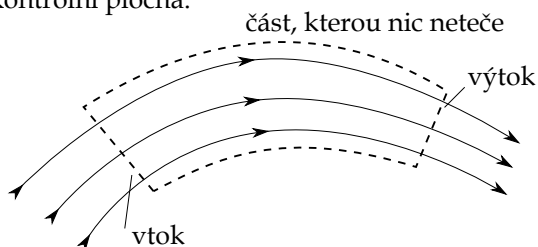
Ze základní školy znáte pouze práci s nenulovým druhým členem levé strany, neboť se předpokládalo, že $dm/dt = 0$ neboť $m = \text{konst}$, což lze jistě předpokládat pro *hmotný bod*.

dm/dt označujeme také $\dot{m}$ a jedná se o *hmotnostní tok*, konkrétně

$$\dot{m} = \rho \vec{u} \cdot \vec{S}, \quad (3)$$

kde ρ je hustota a $\vec{S}$ plocha, kterou kapalina proudí – tj. hranice vyšetřovaného objemu. Směrem plochy rozumíme směr *normály* k této ploše. Je rozumné volit plochu $\vec{S}$ tak, aby její jednotlivé elementy byly buď rovnoběžné s rychlostí (tedy $\vec{u} \cdot \vec{S} = 0$) nebo na ní kolmé (potom $\vec{u} \cdot \vec{S} = \pm uS$, „+“ pro vtok, „–“ pro výtok).

Kontrolní plocha:



Obrázek 1: Náčrtek proudnic a kontrolní plochy. Je nepodstatné, co se děje *uvnitř*, jen vtoky a výtoky.

11.1 Proud na desku ve 2D

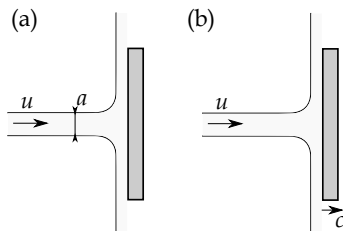
Proud vody dopadá na desku rychlostí u . Vypočtěte sílu, kterou proud působí na desku. Řešte jen dvourozměrně.

- Proud dopadá kolmo, deska se nepohybuje.
- Proud dopadá kolmo, deska se pohybuje stejným směrem rychlostí v .
- Při jaké rychlosti desky z ní dostaneme největší výkon?

11.1.1 Řešení

Ad (a) Napíšeme si větu o změně toku hybnosti přes hranici kontrolního objemu zahrnujícího desku a kousek paprsku před dopadem:

$$\vec{F} = \int_{\partial KO} \vec{u} \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (4)$$



Obrázek 2: Ilustrace k příkladu 11.1.

Jelikož tekutina proudí pouze v paprsku, stačí nám jako plochu vzít průřez paprsku, což je mimochodem jediný vstup. Výstup je podél desky na všechny strany, takže lze očekávat, že se díky symetrii úlohy tento příspěvek vynuluje. Zbude nám tedy pouze ten vstup; příslušná síla působí podél osy x

$$F_x = \rho u S = \rho S u^2; \quad F_y = 0 \quad (5)$$

Znaménko je kladné, tzn. že síla působí doprava, tedy podél pohybu paprsku (bylo by divné, kdybychom stříkali na desku a tu desku to tahalo *k nám*. Ale pozor v jiných konfiguracích už to nemusí být tak snadné uhádnout a je třeba se pečlivě držet konvence.)

Ad (b) Děj probíhá na desce, takže se na problém musíme dívat z hlediska vztažné soustavy desky. Transformujeme se do této vztažné soustavy:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \quad (6)$$

Jiné než x -ové složky jsou nulové, takže

$$u'_x = u_x - v_x \quad (7)$$

a tedy použitím výsledku (5)

$$F_x = \rho S (u - v)^2 \quad (8)$$

Ad (c) Mechanický výkon spočítáme jako

$$\dot{W} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \rho S v (u - v)^2 \quad (9)$$

Hledáme-li extrém vůči nějakému parametru, položíme derivaci podle tohoto parametru rovnou nule:

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial v} = 0 = \rho S (u^2 - 4uv + 3v^2) \quad (10)$$

$$0 = 3v^2 - 4uv + u^2 \quad (11)$$

Použijeme obecné řešení kvadratické rovnice

$$v_{1,2} = \frac{-(-4u) \pm \sqrt{(4u)^2 - 4 \cdot 3 \cdot u^2}}{2 \cdot 3} = \frac{u}{6} (4 \pm \sqrt{4}) = \begin{cases} u \\ \frac{1}{3}u \end{cases} \quad (12)$$

Výkon v případě prvního kořene je

$$\dot{W}_1 = \rho S u (u - u)^2 = 0 \quad (13)$$

v případě druhého

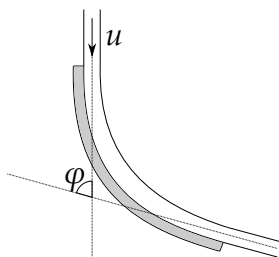
$$\dot{W}_2 = \frac{1}{3} u \rho S \left(u - \frac{1}{3}u \right)^2 = \frac{4}{27} \rho S u^3 > \dot{W}_1 \quad (14)$$

jedná se tedy o maximum.



11.2 Zahnutá lopatka

Svislý proud vody padá na ohnutou lopatku, kde se ohýbá o úhel φ . Určete velikost a směr výsledné síly, známe-li rychlost proudu u a plochu jeho průřezu S .



Obrázek 3: Ilustrace k příkladu 11.2.

11.2.1 Řešení

Budeme řešit po složkách. Ve směru y vstupní hybnost je

$$F_y^{in} = \rho S u^2 \quad (15)$$

výstupní

$$F_y^{out} = \rho S u^2 \cos \varphi \quad (16)$$

ta přispívá se znaménkem mínus, takže

$$F_y = \rho S u^2 (1 - \cos \varphi) \quad (17)$$

Všimněme si, že $\cos \varphi$ není na druhou, jelikož příspěvek k síle je $\dot{m}u$ a $\dot{m}$ nezávisí na úhlu. Kolmá složka x obsahuje pouze výstup, takže

$$F_x = -\rho S u^2 \sin \varphi \quad (18)$$

má záporné znaménko, takže působí proti směru, kam paprsek zahl. Velikost síly tedy je

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \rho S u^2 \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = \rho S u^2 \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \quad (19)$$

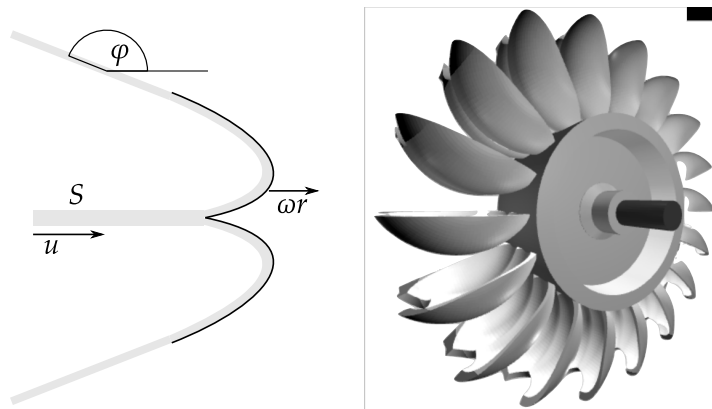
a směr

$$\alpha = \arctg \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (20)$$

Nejvyšší síly vzhledem k úhlu φ dosáhneme pro úplné otočení paprsku, tj. $\varphi = \pi$, protože potom je člen s kosinem $+2$. V mnohých případech by však otočený paprsek sám sobě překážel a tak se užívají menší úhly.

11.3 Peltonova turbína

Vypočítejte kroutivý moment a výkon Peltonovy turbíny. Úhel odklonu φ , plocha paprsku S , rychlost paprsku u , oběžná rychlost v místě ostříku ωr . Při jakých otáčkách je výkon nejvyšší?



Obrázek 4: Dopadající paprsek se rozřízne na dvě části, které se odrazí proti směru pohybu (ale ne úplně, aby nebrzdily následující lopatku). Celé kolo má lopatky celkem hustě, takže na každou z nich dopadá paprsek jen chvíli. Kontrolní objem se proto volí s jednou stěnou statickou (tam, kde paprsek tečně naráží na kolo) a druhou dynamickou podle aktuálně ostříkované pohyblivé se lopatky. Důsledkem je, že hmotnostní tok se netransformuje, turbína stále zpracovává to množství, které přivede paprsek, „neutíká“ mu jako v případě prvního příkladu.

11.3.1 Řešení

Axiální i radiální složky síly budou zanedbatelné díky geometrii lopatek, podstatná je jen tečná složka F_θ

$$F_\theta = \dot{m}(u - \omega r) - \dot{m}(u - \omega r) \cos \varphi = \rho S u (u - \omega r) (1 - \cos \varphi) \quad (21)$$

Točivý moment je $T = r F_\theta$ a výkon

$$\dot{W} = T \omega = \omega r F_\theta = \omega r \rho S u (u - \omega r) (1 - \cos \varphi) = \rho r S u (1 - \cos \varphi) (u \omega - r \omega^2) \quad (22)$$

Hledáme-li optimální otáčky, musíme najít nejvyšší výkon vůči ω , což nastává tehdy, je-li derivace podle $\omega = 0$

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial \omega} = \rho r S u (1 - \cos \varphi) (u - 2r \omega) \quad (23)$$

Okamžitě vidíme, že toto se rovná nule, pokud

$$\omega_m = \frac{u}{2r} \quad (24)$$

Odpovídající výkon je

$$\dot{W}_m = \frac{u}{2r} r \rho S u (u - \frac{u}{2r} r) (1 - \cos \varphi) = \frac{1}{4} u^3 \rho S (1 - \cos \varphi) \quad (25)$$

Přepíšme si tento optimální výkon pomocí průtoku a výšky přetěbné pro vytvoření rychlosti u . $\dot{m} = \rho S u$, $u = \sqrt{2gh}$, tedy

$$\dot{W}_m = \frac{1}{4} \dot{m} (2gh) (1 - \cos \varphi) = \frac{1 - \cos \varphi}{2} \dot{m} gh \quad (26)$$

kde mgh je potenciální energie. Účinnost systému tedy je $(1 - \cos \varphi)/2$, v zadaném případě pro $\varphi \approx 165^\circ$, $(1 - \cos \varphi)/2 \approx 98\%$. Pochopitelně účinnost ještě snižují ztráty

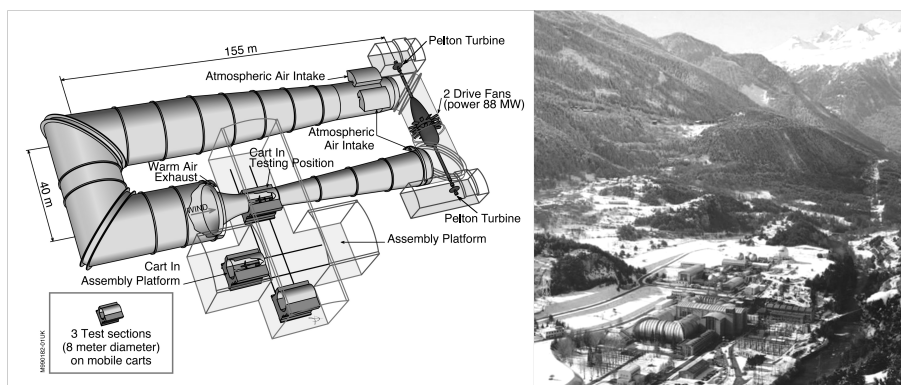


v přívodním potrubí, trysce a také to, že ne všechna voda proudí tak pěkně podél lopatky, značná část vody odlétá v podobě kapiček do náhodných směrů. Každopádně platí, že Peltonova turbína je perfektní volba v případě, že máte k dispozici poměrně malé množství vody na velkém převýšení.

Použití Peltonovy turbíny

Aerodynamický tunel S1MA na ústavu ONERA (Francouzská obdoba našeho VZLÚ) v Modane ve Francouzském Savojsku má úctyhodný výkon 88 MW. Velkolepou stavbu začali Němci v tehdy Rakouských Alpách během druhé světové války, avšak nedokázali stavbu dokončit dříve než začali prohrávat a pak už na vědu nebyly peníze. Po válce byl výzkumný ústav spolu s celým údolím přidělen v rámci kompenzací Francii, která dílo v roce 1952 dokončila.

Proud vzduchu je poháněn dvěma ventilátory o průměru 15 m s 10 a 12 lopatkami, které se otáčejí proti sobě. Každý ventilátor je poháněn Peltonovou turbínou o výkonu 44 MW. Na pohon se spotřebuje 10^7 m^3 vody ročně přiváděné z vysokohorských nádrží s převýšením 840 m. Při plném výkonu proteče Peltonovými turbínami $15 \text{ m}^3/\text{s}$. Vzduch v tunelu se rozpohybuje během tří minut a v měřicí sekci o průměru 8 m dosáhne rychlosti 1100 km/h. Takovouto věc by nebylo možné pohánět elektrickou energií kvůli stabilitě sítě.



Obrázek 5: Schéma aerodynamického tunelu S1MA v Modane ve Francii, který je poháněn dvojicí Peltonových turbín. Výzkumný ústav je umístěn v Alpách a tak s převýšením není problém.

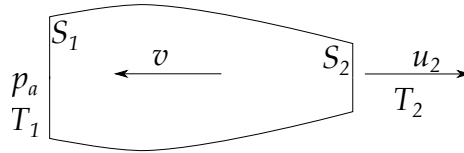
11.4 Proudový motor

Proudový motor se pohybuje rychlostí v , plocha průřezu je na vstupu je $S_1 = 1,15 \text{ m}^2$, na výstupu $S_2 = 0,65 \text{ m}^2$. Tlak a teplota vzduchu jsou $p_1 = 0,6 \text{ bar}$ a $T_1 = 240 \text{ K}$, teplota vystupujícího vzduchu je $T_2 = 650 \text{ K}$. Vypočítejte tah motoru.

11.4.1 Řešení

Jednorozměrné znění věty o změně toku hybnosti je (použijeme konvenci, že „+“ značí vtok a „-“ výtok, může to být i obráceně, ale je nutný fyzikální vzhled, na co síla působí)

$$F_x = \dot{m}_1 u_1 - \dot{m}_2 u_2. \quad (27)$$



Obrázek 6: Schématický náčrtek proudového motoru.

Předpokládáme, že hmotnostní podíl spalín je zanedbatelně malý, potom

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2, \quad (28)$$

z čehož vypočteme i výstupní rychlost u_2 za předpokladu, že vstupní rychlost je rovna rychlosti, jakou se letadlo pohybuje.

$$u_1 \rho_1 S_1 = u_2 \rho_2 S_2, \quad (29)$$

kde $\rho_{1,2}$ vyjádříme ze stavové rovnice ideálního plynu $p = \rho r T$:

$$\rho_{1,2} = \frac{p_{1,2}}{r T_{1,2}}, \quad (30)$$

kde tlak je v obou případech tlakem okolí, tj. $p_1 = p_2 = p_a$ a teplota na vstupu je také rovna teplotě okolí, $T_1 = T_a$, zatímco teplota výstupních spalín je závislá na termomechanických dějích uvnitř motoru a v našem případě je zadána;

$$u_1 \frac{p_a}{r T_a} S_1 = u_2 \frac{p_a}{r T_2} S_2 \quad (31)$$

z toho vyjádříme u_2

$$u_2 = u_1 \frac{S_1}{S_2} \frac{T_2}{T_a}. \quad (32)$$

Nyní dosadíme do rovnice (27) spolu s vyjádřením hmotnostního toku (31):

$$F_x = u_1 \frac{p_a}{r T_a} S_1 \left(u_1 - u_1 \frac{S_1}{S_2} \frac{T_2}{T_a} \right) = u_1^2 \frac{p_a}{r T_a} S_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \frac{T_2}{T_a} \right) \quad (33)$$

Vložíme předpoklad, že vstupní rychlost vzduchu u_1 je rovna rychlosti letadla v (to ale není pravda při rozjezdu) a dosadíme

$$F_x = v^2 \frac{p_a}{r T_a} S_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \frac{T_2}{T_a} \right) = -267 \text{ kN}. \quad (34)$$

Všimněme si, že hodnota je záporná, čili, že síla působící na motor směřuje proti směru x , což je v pořádku – jinak by letadlo couvalo.

11.5 Raketový motor

Jaké rychlosti může dosáhnout raketa o hmotnosti m_0 , která si nese palivo o hmotnosti m_p , je-li v raketové trysce o průřezu S_2 urychlován plyn o hustotě ρ_2 na rychlost u_2 ?

Raketový motor je také typem reaktivního pohonu. Od proudového liší tím, že neurychluje okolní materiál, ale musí si vystačit pouze se spalínami (nebo něčím jiným, co urychluje, třeba ionty). Tah motoru tedy je

$$F_x = \rho_2 S_2 u_2^2 = \dot{m} u_2 \quad (35)$$



Indexy $_2$ si v dalším odpustíme, protože stejně nemáme nic na vstupu. Tato síla způsobí urychlení celé rakety o aktuální hmotnosti $m(t) = m_0 + m_p(t)$ podle Newtonova zákona. Hmotnost je odpor těles vůči zrychlování.

$$ma = \dot{m}u \quad (36)$$

zrychlení a a hmotnostní tok $\dot{m}$ napíšeme poctivě pomocí derivací

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} \quad (37)$$

kde v je rychlost rakety. Z obou stran rovnice zkrátíme dt a převedeme hmotnost k hmotnosti. Rychlost spalín u nesouvisí s rychlostí rakety v , chová se tedy jako konstanta (případně by mohla souviset s aktuálním naplněním nádrže, jak uvidíme v dalším příkladu)

$$dv = u \frac{dm}{m} \quad (38)$$

a integrujeme

$$\int_0^{v_m} dv = u \int_{m_c}^{m_0} \frac{dm}{m} \quad (39)$$

kde v_m je dosud neznámá maximální rychlost rakety a m_c je počáteční hmotnost rakety i s palivem, $m_c = m_0 + m_p$

$$[v]_0^{v_m} = v_m = u [\ln m]_{m_c}^{m_0} = u \ln \frac{m_0}{m_c} \quad (40)$$

všimněme si, že logaritmus je záporný (argument < 1), čili, že raketa odlétá opačným směrem než spaliny, což je v pořádku. Tato rovnice se jmenuje podle Konstantina Eduardoviče Ciolkovského (1857 – 1935). Často se píše pro absolutní změnu velikosti rychlosti (je samo sebou, že rychlost rakety a spalín jdou proti sobě). **Ciolkovského rovnice:**

$$|\Delta v_m| = u \ln \frac{m_0 + m_p}{m_0} \quad (41)$$

Kde jsme zavedli Δ , neboť jde o změnu rychlosti po spotřebování paliva m_p .

U rakety je tedy klíčové dosáhnout velkou rychlost spalín, vždy je třeba pracovat v nadzvukovém režimu. Proto mají raketové trysky rozšiřující se tvar Lavalovy dýzy (viz termomechaniku). V literatuře se často můžeme setkat s veličinou *specifický impuls* $I_{SP} = u/g$, který nám udává, jak dlouho by se dokázalo samotné palivo udržet v tíhovém poli g , jednotkou jsou vteřiny [s].

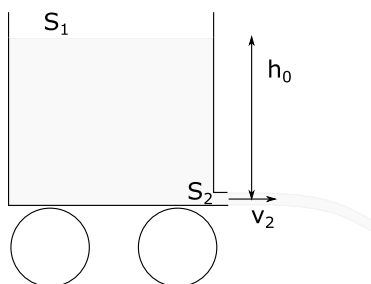
Hodnoty výtokových rychlostí se pohybují následovně: urychlovací motory raketoplánu (takové ty dvě raketky po stranách): $u \approx 2500$ m/s, palivem je pevný kopolymer polybutadienu, kyseliny akrylové a akrylonitrilu, jako okysličovadlo slouží chloristan amonný. Mezi motory na tekuté palivo zmiňme Kuzněcův NK-33 s výtokovou rychlostí $u \approx 3250$ m/s používaný v Sojuzech; palivem je petrolej okysličovaný kapalným kyslíkem. Evropské rakety Ariane 2 – 5 používají kryogenní motor HM7B na kapalný vodík a kapalný kyslík s úctyhodnou rychlostí $u \approx 4360$ m/s. Za vyšší výtokovou rychlost se platí komplikovanou nádrž – musí to být obrovský kryostat. Pokud vím, tak nejvyšší rychlosti z chemických motorů dosahuje RL-10B2 používaný v raketách Delta, je také na kapalný vodík a kyslík a výtoková rychlost je $u \approx 4500$ m/s. Řádově vyšších rychlostí dosahují iontové motory $u \sim (2 - 3) \cdot 10^4$ m/s, avšak ty jsou zatím typické malým tahem, takže se výborně hodí na manévrování vesmírných sond, ale ze země nezvednou ani mouchu.



11.6 Hydrostatický motor (špatný reaktivní motor)

Nádrž s podstavou o ploše S_1 je na začátku děje naplněna vodou do výšky h_0 . U dna nádrže je otvor o ploše S_2 , z něhož voda vytéká ve vodorovném směru. Nádrž je umístěna na vozíčku a hmotnost prázdné nádrže a vozíčku je m_0 . Pohyb vozíčku i vytékání vody uvažujte beze ztrát a vypočtěte

- sílu a zrychlení vozíčku při počáteční výšce vody h_0
- konečnou rychlost vozíčku.



Obrázek 7: Vozíček s hydrostatickým motorem

11.6.1 Řešení

Vyjdeme z věty o změně toku hybnosti:

$$F_x = \dot{m}u, \quad (42)$$

kde za rychlost u dosadíme rychlost trysky, která zařízení roztláčí

$$u = \sqrt{2gh}, \quad (43)$$

což vychází z Bernoulliovy rovnice:

$$\frac{1}{2}u_1^2 + hg + p_a = \frac{1}{2}u_2^2 + p_a \quad (44)$$

kde z rovnice kontinuity vyjádříme $u_1 = u_2 \frac{S_2}{S_1}$:

$$\frac{1}{2}u_2^2 \frac{S_2^2}{S_1^2} + hg = \frac{1}{2}u_2^2 \rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \doteq \sqrt{2gh}. \quad (45)$$

Tento výsledek využijeme i při vyjádření hmotnostního toku $\dot{m}$

$$\dot{m} = \rho S_2 u_2 = \rho S_2 \sqrt{2gh} \quad (46)$$

a dosadíme do rovnice (42):

$$F_x = \dot{m}u = \rho S_2 u_2^2 = 2\rho S_2 gh, \quad (47)$$

což pro $h = h_0$ je 0,2 N a vypočteme zrychlení a

$$a = \frac{F_x}{m} = \frac{2\rho S_2 gh}{\rho S_1 h + m_0}, \quad (48)$$

Zanedbali jsme slabší jevy jako již diskutovanou rychlost volné hladiny a také naklonění volné hladiny vlivem tohoto zrychlení (hladina by byla nakloněna jen o úhel $\alpha = \arctg \frac{a}{g} = 0,8^\circ$).



Nyní se podíváme, jakou konečnou rychlost toto zařízení dosáhne. Využijeme definice zrychlení jako časové změny rychlosti, tedy konečnou rychlost dosáhneme integrováním zrychlení přes čas až do okamžiku vyprázdnění nádrže:

$$v_{\text{fin}} = \int a dt, \quad (49)$$

za zrychlení dosadíme výraz (48), na zjištění dt využijeme stejný trik jako při určování doby výtoku z nádoby – rychlost poklesu volné hladiny je $u_1 = \frac{dh}{dt}$, tedy

$$dt = \frac{1}{u_1} dh = \frac{S_1}{S_2} \frac{1}{u_2} dh, \quad (50)$$

dohromady

$$v_{\text{fin}} = \int_0^{h_0} \frac{2\rho S_2 g h}{\rho S_1 h + m_0} \cdot \frac{S_1}{S_2} \frac{1}{\sqrt{2gh}} dh \quad (51)$$

a zbytek příkladu už je jen o řešení tohoto integrálu

$$\dots = \sqrt{2g\rho S_1} \int_0^{h_0} \frac{h}{\rho S_1 h + m_0} \frac{1}{\sqrt{h}} dh, \quad (52)$$

provedeme substituci $x = \sqrt{h}$, $dx = dh/(2\sqrt{h})$

$$\dots = \sqrt{2g\rho S_1} 2 \int_0^{\sqrt{h_0}} \frac{x^2}{\rho S_1 x^2 + m_0} dx, \quad (53)$$

a další substituci $y = x\sqrt{\frac{\rho S_1}{m_0}}$, $dy = dx\sqrt{\frac{\rho S_1}{m_0}}$

$$\dots = 2\sqrt{2g\rho S_1} \cdot \frac{1}{m_0} \cdot \frac{m_0}{\rho S_1} \cdot \sqrt{\frac{m_0}{\rho S_1}} \int_0^{\sqrt{\frac{\rho S_1 h_0}{m_0}}} \frac{y^2}{y^2 + 1} dy, \quad (54)$$

$$\dots = 2\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\frac{m_0}{\rho S_1}} \int_0^{\sqrt{\frac{\rho S_1 h_0}{m_0}}} \frac{y^2 + 1 - 1}{y^2 + 1} dy = \dots \int_0^{\sqrt{\frac{\rho S_1 h_0}{m_0}}} 1 - \frac{1}{y^2 + 1} = \dots [y - \arctg y], \quad (55)$$

vrátíme nazpátek všechny substituce a dosadíme horní mez

$$\dots = 2\sqrt{2g} \cdot \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{m_0}{\rho S_1}} \arctg \sqrt{\frac{\rho S_1 h_0}{m_0}} \right) \quad (56)$$

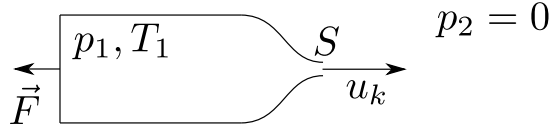
11.7 Tah tlakové láhve ve vakuu

Tlaková láhev s héliem ($\kappa = 1,67$, $r = 2079 \text{ J/(kgK)}$) je ve vakuu otevřena. Jelikož není vybavena Lavalovou dýzou, uniká plyn pouze kritickou rychlostí

$$u_k = \sqrt{\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1}} \quad (57)$$

vypočítejte tah a zrychlení, má-li láhev objem V , hmotnost M a plyn uvnitř má teplotu T_1 a tlak p_1 .

Řešte nejprve obecně, pak dosaďte: plocha otvoru $S = 1,0 \text{ cm}^2$, $p_1 = 200 \text{ bar}$, $T_1 = 200 \text{ K}$, $\kappa = 1,6667$, $r = 2079 \text{ J/kgK}$, objem a hmotnost láhve $V = 301$, $M = 30 \text{ kg}$.



Obrázek 8: Tlaková láhev se zúženou dýzou.

Nápověda: stavová rovnice ideálního plynu:

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (58)$$

Děj ve zúžení považujte za adiabatický, tj. hustota a tlak jsou svázány vztahem

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{konst.} \quad (59)$$

Kritický tlakový spád je

$$\frac{p_k}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (60)$$

11.7.1 Řešení

Sílu spočteme z věty o změně toku hybnosti

$$F = \dot{m}u_k \quad (61)$$

rychlost u_k je zadaná, potřebujeme už jenom $\dot{m}$

$$\dot{m} = \rho_k u_k S \quad (62)$$

kde ρ_k je hustota hélia v trysce, kde je kritické proudění, tedy i hustota je kritická. Dostaneme se k ní přes adiabatický děj s kritickým tlakovým spádem

$$\frac{p_k}{\rho_k^\kappa} = \frac{p_1}{\rho_1^\kappa} \longrightarrow \rho_k = \rho_1 \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (63)$$

použijeme zadanou rovnici (60)

$$\rho_k = \rho_1 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (64)$$

tedy

$$\dot{m} = \rho_1 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \cdot \sqrt{\frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1}} \cdot S \quad (65)$$

Spočítáme sílu

$$F = \rho_1 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \cdot \frac{2\kappa r T_1}{\kappa + 1} \cdot S \quad (66)$$

$\rho_1 r T_1 = p_1$ a členy s $2/(\kappa + 1)$ spojíme

$$F = p_1 S \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 974 \text{ N} \quad (67)$$

zrychlení spočítáme jako (nezapomeneme zahrnout hmotnost plynu i prázdné láhve)

$$a = \frac{F}{\rho_1 V + M} = \frac{p_1 S}{\frac{p_1 V}{r T_1} + M} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 31 \text{ m/s}^2 \quad (68)$$



11.8 Otázky k zamyšlení

- Při zpracování velkého výškového spádu vodním kolem se vyplatí naskládat více kol za sebe – první nahoru, to, co vyteče z prvního jde na druhé hned pod ním a tak dále. Vyplatilo by se toto řešení i v případě Peltonových turbín (bez ohledu na cenu instalace)?
- Jste na plachetnici a nevaně vítr, máte však k dispozici ventilátor. Může s lodí pohnout, pokud ventilátor namíříte na plachtu? Šlo by ho využít efektivněji?
- Odhadněte, jak se škáluje ztrátový výkon obtékaného tělesa s rychlostí
- Při aplikaci na automobil, přepočtete škálování ztrátového výkonu (energie za jednotku času) na ztrátovou spotřebu (energie na jednotku vzdálenosti)
- Při aplikaci na potrubí odhadněte, jaký vliv má započtení nějakého reálného rychlostního profilu (zvětší nebo zmenší sílu na element potrubí?)
- Jaká je výhoda raketového motoru oproti proudovému? A jaká je výhoda proudového motoru? Zamyslete se, jestli by se to nedalo zkombinovat?

11.9 Poděkování

Děkuji za podporu při vytváření těchto podkladů projektu ESF II číslo CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239.