

ESF II projekt Západočeské univerzity v Plzni

reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Vybrané partie z elektrických strojů
(KEV/VPS)

Magnetické síly v elektrických strojích

Jan Šobra

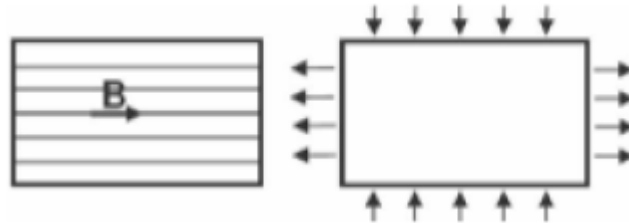
2021/2022

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Příčiny vzniku magnetických sil**
- **Magnetostrikce**
 - Uvnitř feromagnetik, u točivých strojů nebývá významnou příčinou e-NVH
 - Síly úměrné B^2
- **Lorentzova síla**
 - Působí na vodiče v drážce
 - Síly úměrné I, B
- **Maxwellova síla (síla z Maxwellova tenzoru)**
 - Působí na rozhraní feromagnetika a vzduchu
 - Síly úměrné B^2

Magnetické síly v elektrických strojích

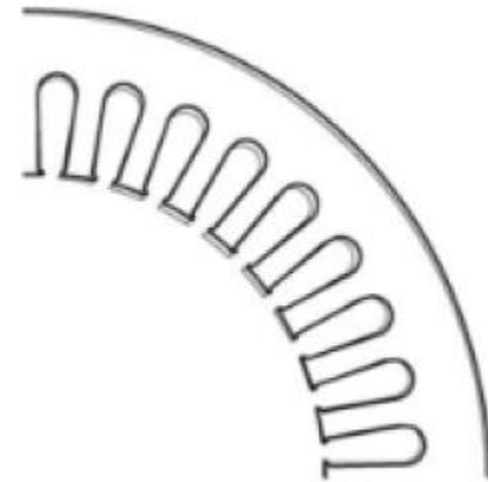
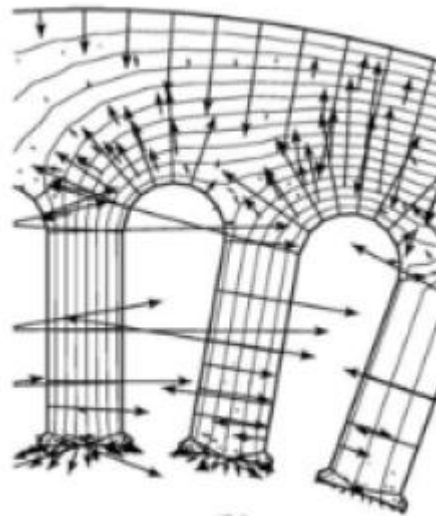
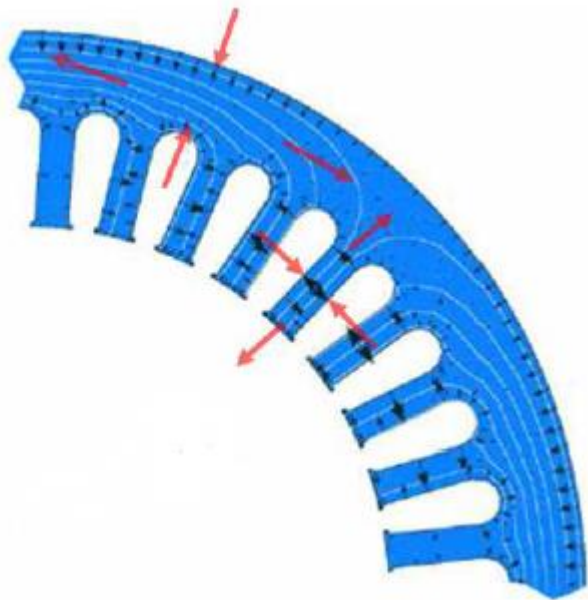
- **Příčiny vzniku magnetických sil – Magnetostrikce**
- Změna tvaru a objemu feromagnetik při střídavé magnetizaci
 - Změna rozměrů v řádu μm



- Může způsobit radiální vibrace jha statoru a případně také hluk
- Síly působí na dvojnásobku napájecí frekvence **$2L$**

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Příčiny vzniku magnetických sil – Magnetostrikce**
- Magnetostrikční síly působí lokálně v závislosti na směru siločar magnetického pole



Zdroj: EOMYS Engineering

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Příčiny vzniku magnetických sil - Lorentzova síla**

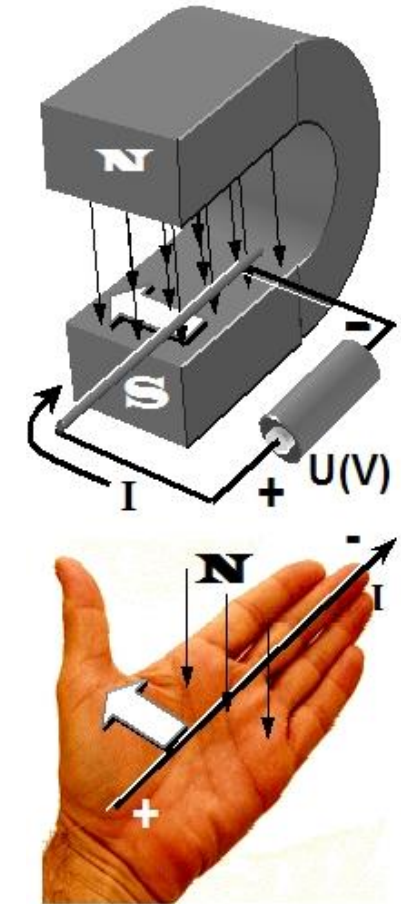
- Předpoklad kolmosti $\vec{B}$ a $\vec{I}$ u elektrických strojů

$$F = BIl_{Fe}$$

- Mag. indukce v drážce je velmi malá

- => tyto síly lze běžně zanedbat

- Význam při analýze vibrací čel vinutí velkých strojů



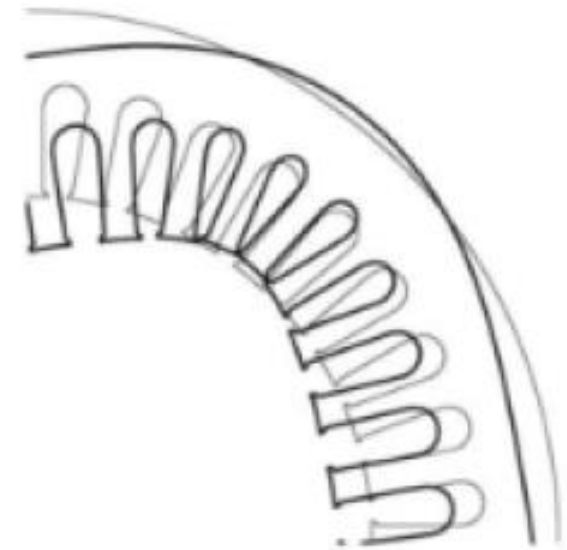
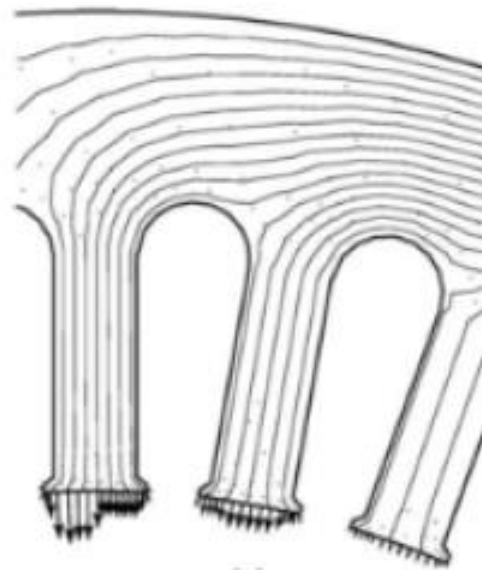
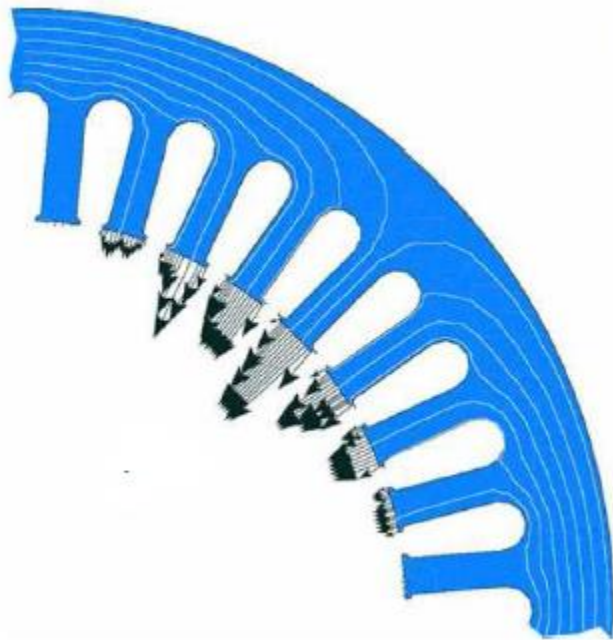
Zdroj: https://www.wikiskripta.eu/w/Lorentzova_s%C3%ADla

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Příčiny vzniku magnetických sil - Maxwellova síla**
 - Vznik na rozhraní materiálů z různou permeabilitou => působí ve směru menší μ
 - Energie mag. pole soustředěna ve vzduchové mezeře
 - Energie nemůže být skladována bez pnutí => hustota energie odpovídá tlaku (pnutí)
- $$N \cdot m^{-2} = Pa$$
- Integrace Maxwellovy síly přes celý rotor = opak integrace přes celý stator
 - Vznik opačně orientovaného momentu na statoru a rotoru
 - Radiální i tečné síly mají stejný obsah harmonických

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Příčiny vzniku magnetických sil - Maxwellova síla**
- Vznik na rozhraní materiálů z různou permeabilitou => působí ve směru menší μ



Zdroj: EOMYS Engineering

Magnetické síly v elektrických strojích

- Příčiny vzniku magnetických sil - Maxwellova síla
- Výpočet z Maxwellova tenzoru pnutí

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_x B_y & B_y^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 & B_y B_z \\ B_x B_z & B_y B_z & B_z^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Příčiny vzniku magnetických sil - Maxwellova síla**
- Výpočet síly přes objemový integrál
- Objemová hustota síly

$$\Delta \mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{T}$$

- Celková síla působící na těleso o objemu V

$$\mathbf{F} = \int_V \Delta \mathbf{f} \, dV$$

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Příčiny vzniku magnetických sil - Maxwellova síla**
- Výpočet síly přes plošný integrál
- Plošná hustota síly nebo také magnetický tlak ($N \cdot m^{-2} = Pa$)

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

- Celková síla působící na těleso o objemu V

$$\mathbf{F} = \int_S \Delta \mathbf{p} dS$$

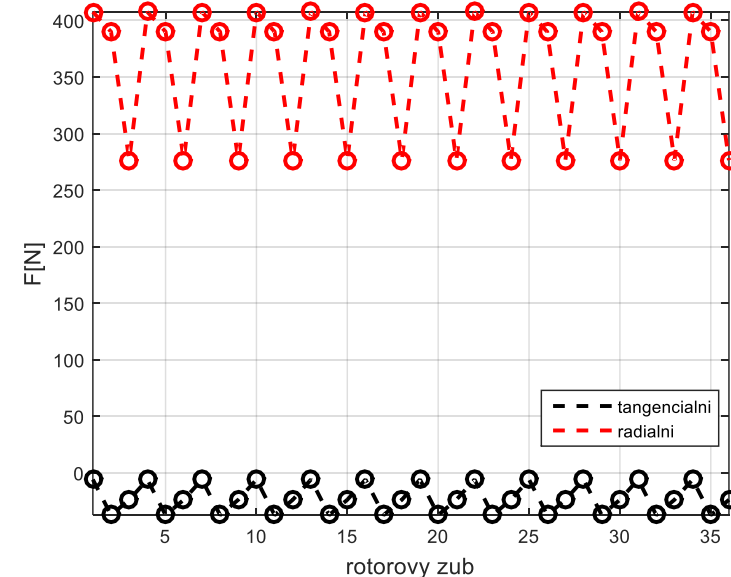
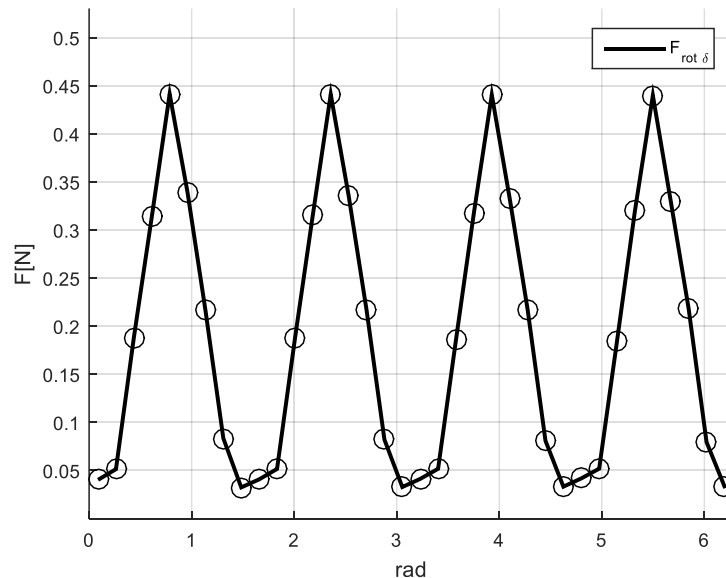
Magnetické síly v elektrických strojích

- **Příčiny vzniku magnetických sil - Maxwellova síla**
- 2D analýza silového působení na rozhraní feromagnetikum – vzduch v kartézském souřadném systému

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_S \begin{bmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|B|^2 & B_x B_y \\ B_x B_y & B_y^2 - \frac{1}{2}|B|^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} dS$$

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Příčiny vzniku magnetických sil**
- Porovnání Lorentzovy síly působící na tyče klece nakrátko (vlevo) a Maxwellovy síly působící na zuby rotoru (vpravo)
 - Asynchronní motor 11 kW, $Q_2 = 36$



Magnetické síly v elektrických strojích

- Dynamické účinky magnetického pole ve vzduchové mezeře => magnetické síly
- Směry působení magnetických sil
 - Radiální
 - Tangenciální (tečný)
 - Axiální
- Velikost sil odvozena z plošné hustoty síly (specifického magnetického tlaku)

$$p = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B^2}{8\pi \cdot 10^{-7}} = 4 \cdot B^2 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,4 \cdot B^2 \text{ MPa}$$

Magnetické síly v elektrických strojích

➤ Dynamické účinky magnetického pole ve vzduchové mezeře => magnetické síly

➤ Směry působení magnetických sil

➤ Radiální

➤ Tangenciální (tečný)

➤ Axiální

Působí vždy

Působí pouze za určitých podmínek

➤ Velikost sil odvozena z plošné hustoty síly (specifického magnetického tlaku)

$$p = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B^2}{8\pi \cdot 10^{-7}} = 4 \cdot B^2 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0,4 \cdot B^2 \text{ MPa}$$

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Radiální magnetické síly**
- Stejné rozložení magnetické indukce pod každou pólovou dvojicí
 - Radiální síla rovnoměrně rozložena
 - Hřídel není namáhán na ohyb
 - Ložiska nejsou dodatečně namáhána
- Nerovnoměrné rozložení magnetické indukce (např. excentricita, ohyb hřídele)
 - Vznik jednostranného magnetického tahu (**UMP** – *unbalanced magnetic pull*)
 - Dodatečné radiální namáhání ložisek
 - Ohybový moment působící na hřídel

Magnetické síly v elektrických strojích

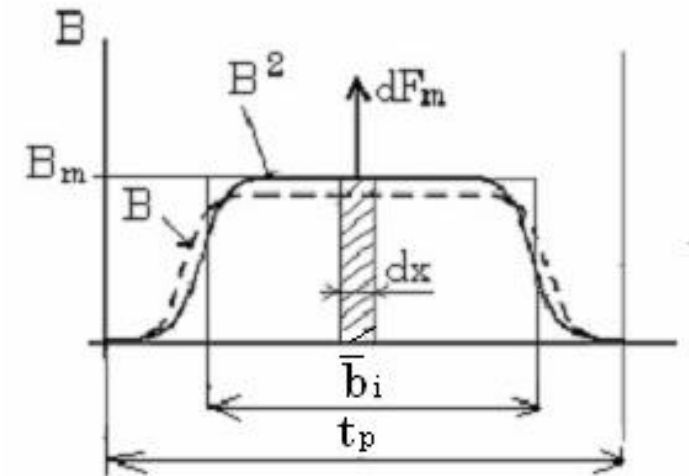
- Radiální magnetické síly – symetrické rozložení mag. pole
- Rovnoměrný magnetický tah po obvodu stroje

- Elementární síla působící na element dx na průběhu B^2

$$dF_m = p.dS = p.dx.l_i$$

- Celková síla na pólovou rozteč

$$F_m = \int_0^{t_p} dF_m = \int_0^{t_p} p l_i dx = \int_0^{t_p} \frac{B^2}{2\mu_0} l_i dx = \frac{l_i}{2\mu_0} \int_0^{t_p} B^2 dx = \frac{1}{2\mu_0} B_m^2 \bar{\alpha}_i t_p l_i$$



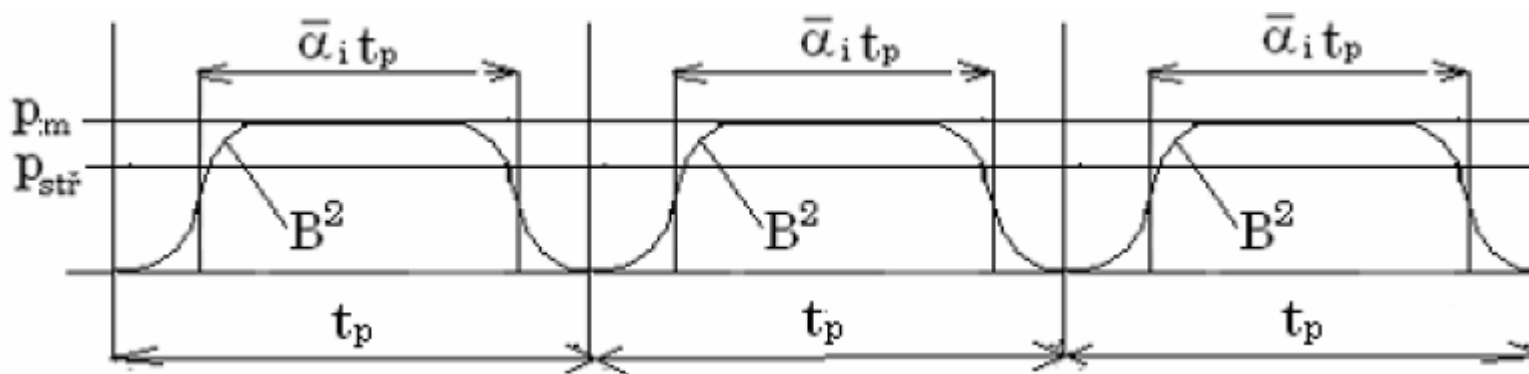
Magnetický tah na pólovou rozteč

Magnetické síly v elektrických strojích

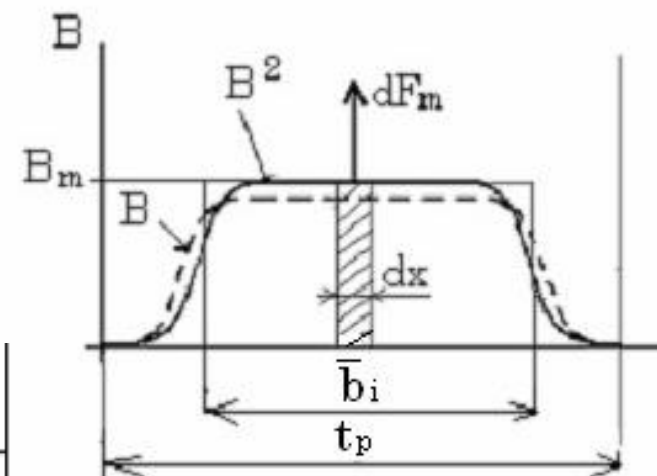
➤ Radiální magnetické síly – symetrické rozložení mag. pole

➤ Velikost $\int_0^{t_p} B^2 dx = \text{plocha obdélníka } B_m^2 \times \bar{b}_i \quad (\bar{b}_i = \bar{a}_i t_p)$

➤ Pokud $p_m = \frac{1}{2\mu_0} B_m^2 \Rightarrow F_m = p_m \bar{a}_i t_p l_i$



Střední hodnota specifického magnetického tahu

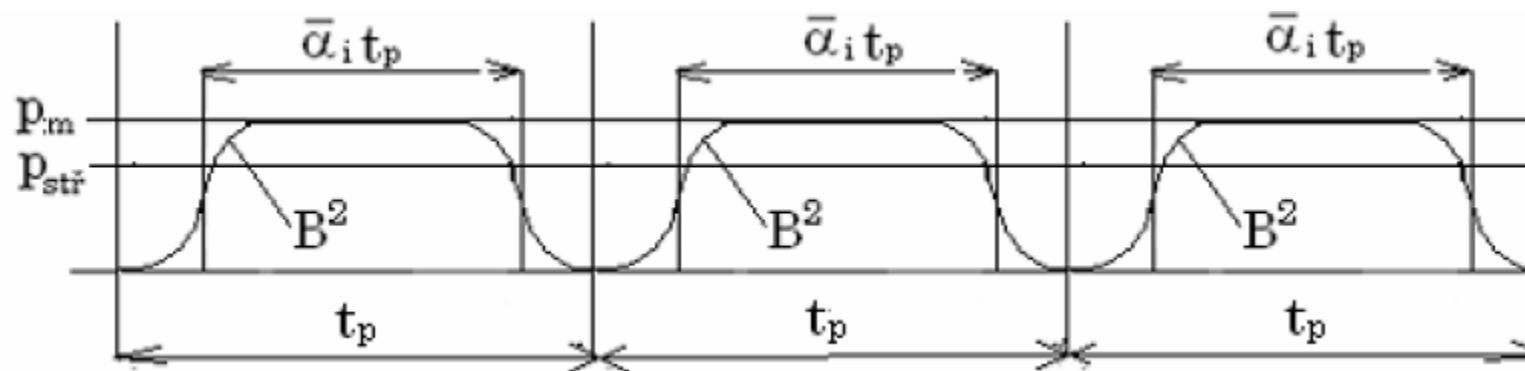


Magnetický tah na pólovou rozteč

Magnetické síly v elektrických strojích

- Radiální magnetické síly – symetrické rozložení mag. pole
- Střední velikost specifického magnetického tahu
- Náhrada křivky B^2 obdélníkem $p_{stř} \times t_p$

$$F_m = p_m \bar{\alpha}_i t_p l_i = p_{stř} t_p l_i \quad p_{stř} = \bar{\alpha} \cdot p_m$$



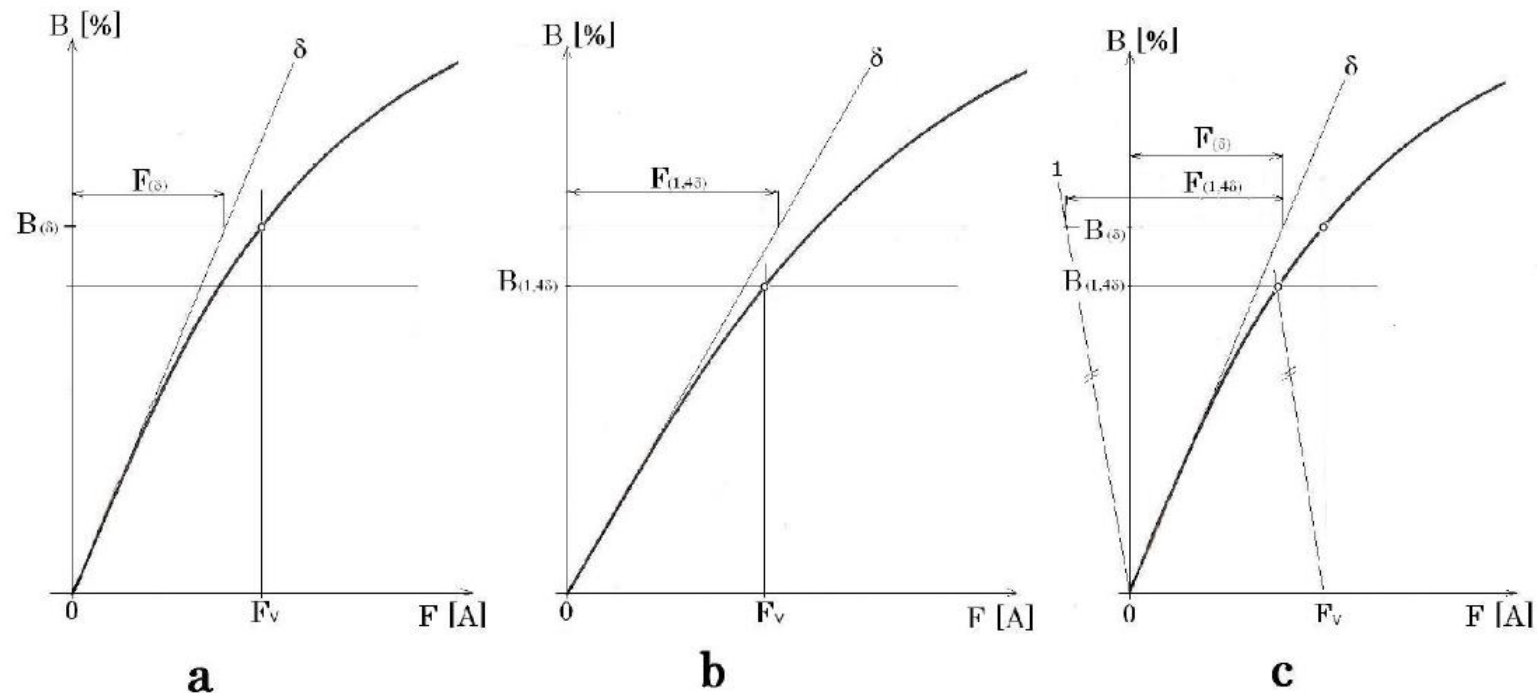
Střední hodnota specifického magnetického tahu

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah**
- Nesymetrické rozložení mag. indukce ve vzd. mezeře => nerovnoměrné rozložení radiální síly na pólových roztečích => jednostranný magnetický tah (UMP)
- Předpoklady při určení velikosti UMP
 - Maximální excentricita bude $e_{max} = 0,1\delta$
 - Výsledné magnetické napětí pro každou pólovou rozteč bude konstantní ($F_v = \text{konst.}$)
 - Při soustředném uložení rotoru bude ve vzduchové mezeře velikosti δ velikost magnetické indukce B
 - Předpokládáme mnohapólový stroj ($2p \geq 4$)

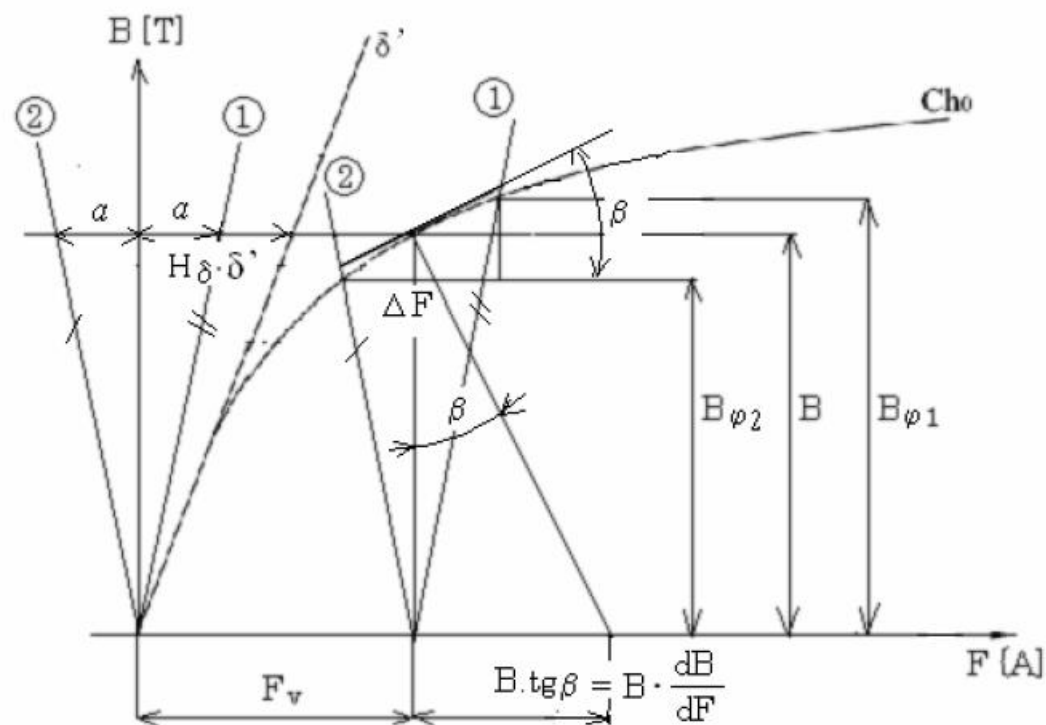
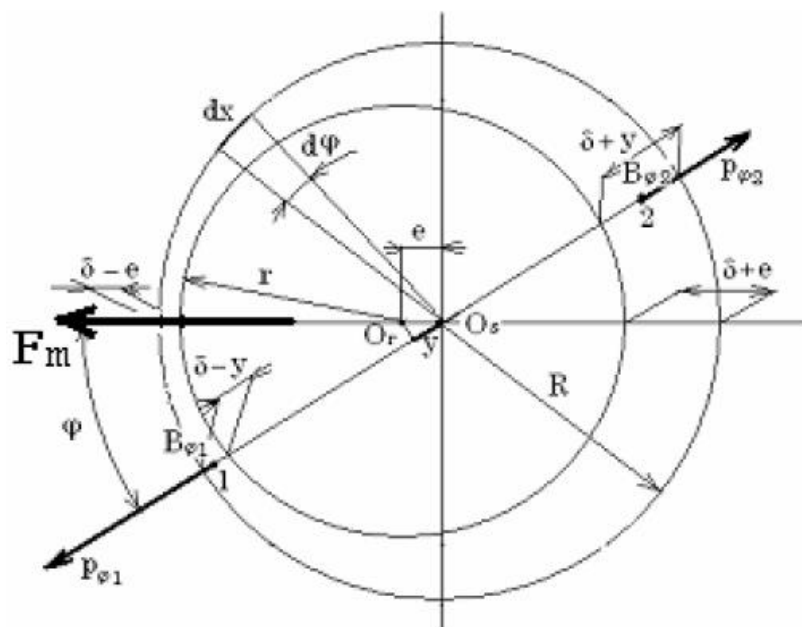
Magnetické síly v elektrických strojích

- Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah
- Změna velikosti mag. indukce při změně velikosti vzd. mezery o 40%



Magnetické síly v elektrických strojích

- Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah
- Obdobný princip při změně vzduchové mezery vlivem excentricity



Magnetické síly v elektrických strojích

- **Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah**

- Excentricita ve směru vodorovné osy

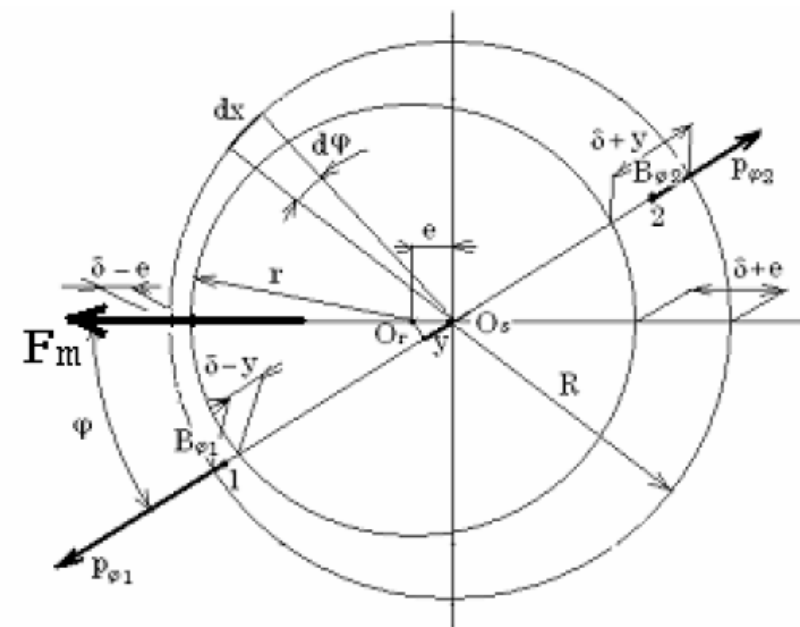
- Odvození pro libovolnou polohu osové přímky pod úhlem φ

- Průmět excentricity do směru přímky je y
- Velikost vzd. mezery: místo 1 ($\delta - y$), místo 2 ($\delta + y$)

$$y = e \cdot \cos \varphi, \quad \delta = R - r, \quad dx = r \cdot d\varphi$$

- Specifické magnetické tlaky

$$p_{\varphi 1} = \frac{B_{\varphi 1}^2}{2\mu_0} \quad p_{\varphi 2} = \frac{B_{\varphi 2}^2}{2\mu_0}$$



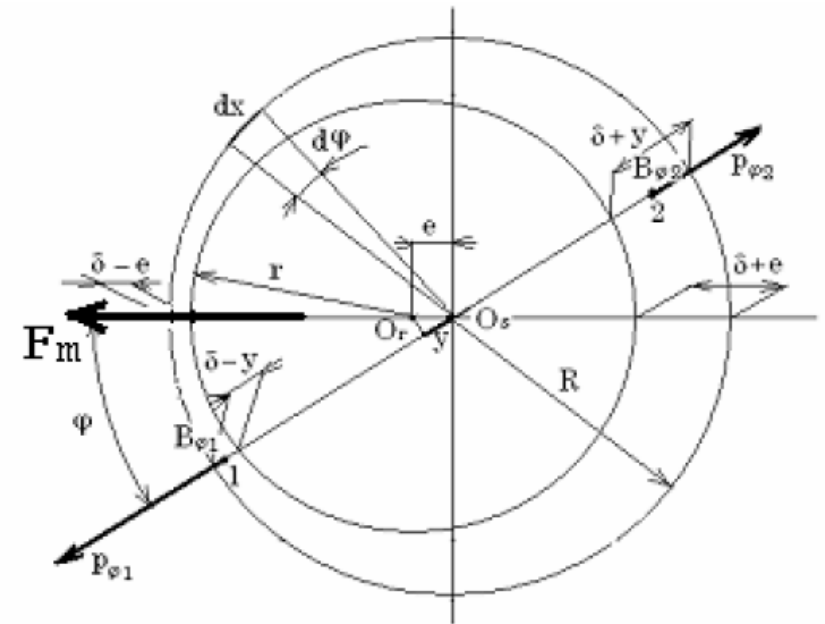
Magnetické síly v elektrických strojích

➤ Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah

➤ Místo 1 – menší vzduchová mezera

- Menší mag. odpor => větší mag. indukce =>=> větší magnetický tah
- Rozdílový magnetický tah působí ve směru menší vzduchové mezery

$$\Delta p_{\varphi} = p_{\varphi 1} - p_{\varphi 2} = \frac{B_{\varphi 1}^2 - B_{\varphi 2}^2}{2\mu_0} = \frac{(B_{\varphi 1} + B_{\varphi 2})(B_{\varphi 1} - B_{\varphi 2})}{2\mu_0}$$



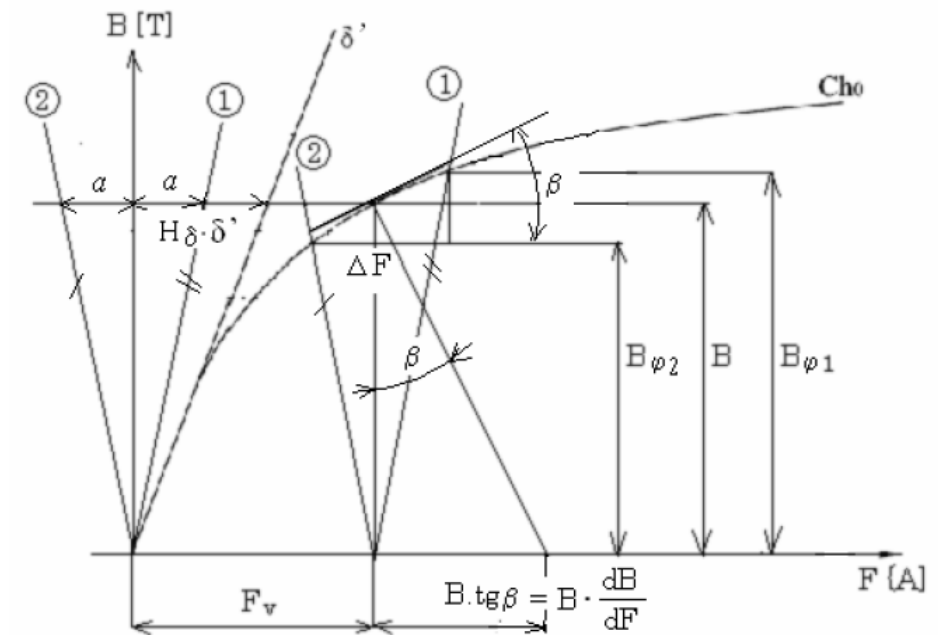
Magnetické síly v elektrických strojích

- **Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah**

- Pokud $e \leq \delta \Rightarrow$ mag. napětí na excentricitě velmi malé $\Rightarrow$ úsek vytknutý přímkami 1 a 2 na Ch_o lze považovat za úsečku

- $\Rightarrow$ pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami ΔF a ΔB

$$\Delta F = 2a = 2F_\delta = 2H_\delta y$$



Magnetické síly v elektrických strojích

➤ Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah

➤ Lze zavést

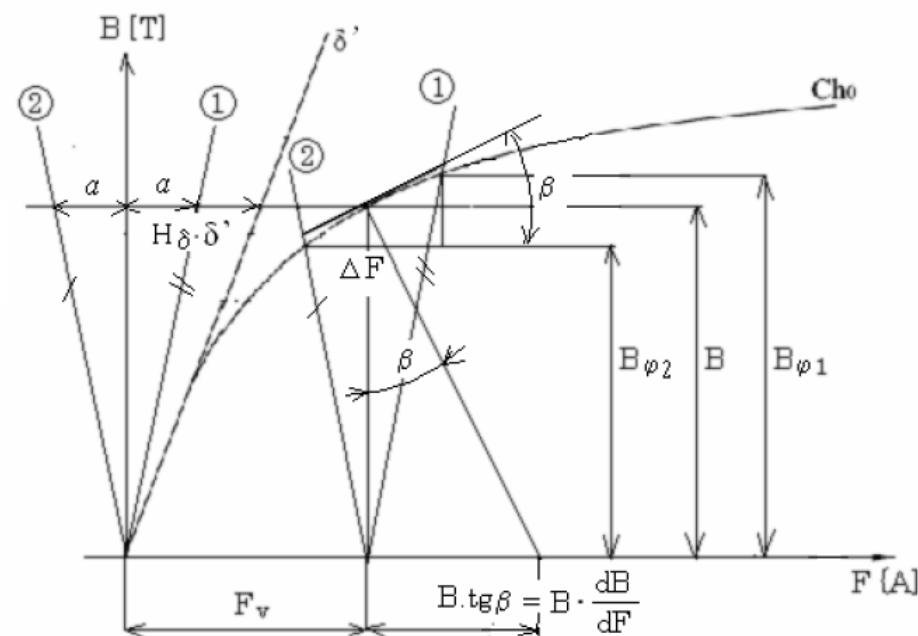
$$B_{\varphi 1} + B_{\varphi 2} = 2B$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta B}{\Delta F} \quad B_{\varphi 1} - B_{\varphi 2} = \Delta B = \Delta F \cdot \operatorname{tg} \beta = 2H_{\delta} y \cdot \operatorname{tg} \beta$$

➤ Po dosazení a úpravě,

$$\Delta p_{\varphi} = \frac{2B \cdot 2H_{\delta} y \cdot \operatorname{tg} \beta}{2\mu_0} = \frac{2B^2}{\mu_0^2} y \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{2B^2}{\mu_0^2} e \frac{dB}{dF} \cos \varphi$$

$$\text{kde } H_{\delta} = \frac{B}{\mu_0}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{dB}{dF} \quad \text{a} \quad y = e \cdot \cos \varphi$$

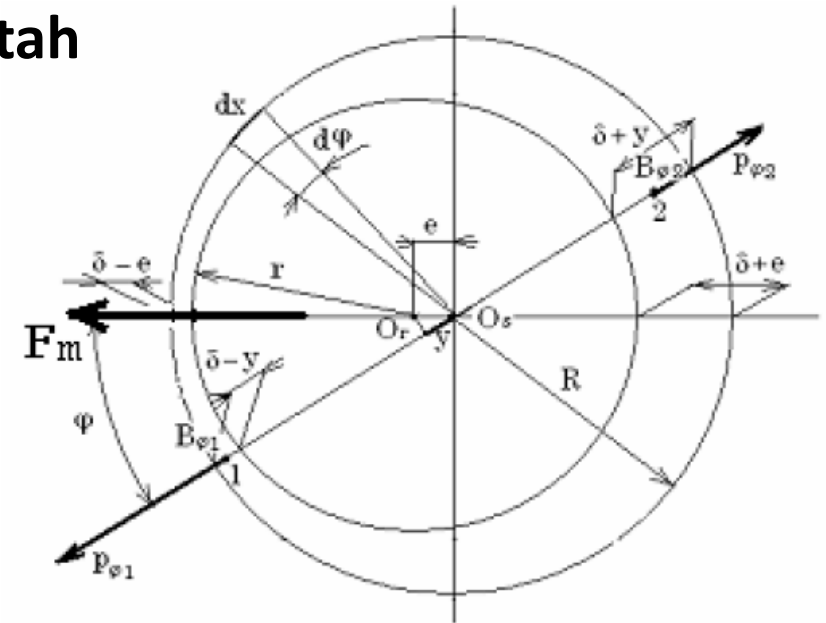


Magnetické síly v elektrických strojích

- Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah
- Magnetický tah na elementu dx

$$dF_m = \Delta p_\varphi \cdot dx \cdot l_i$$

- Výsledný magnetický tah na celém obvodu
 - Integrace od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi$
 - Při integraci do $\varphi = 2\pi \Rightarrow F_m = 0$



$$F_m = \int_{\varphi=0}^{\pi} \bar{\alpha} \cdot dF_m \cos \varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \bar{\alpha} l_i \Delta p_\varphi r \cos \varphi \cdot d\varphi = l_i \bar{\alpha} r \frac{2B^2}{\mu_0^2} e \frac{dB}{dF} \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{\bar{\alpha} \pi D_1 l_i e}{2\mu_0^2} B^2 \frac{dB}{dF}$$

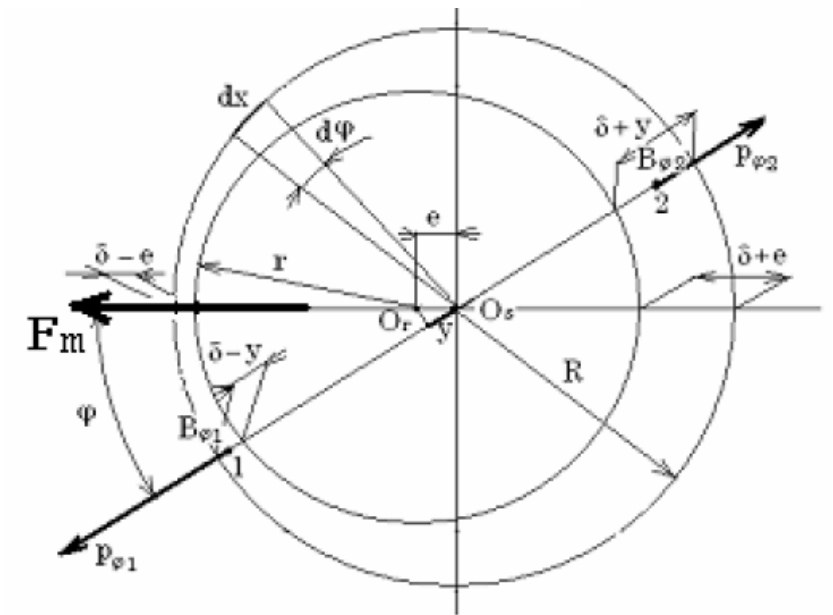
Magnetické síly v elektrických strojích

- Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah
- Výsledný magnetický tah na celém obvodu

$$F_m = \int_{\varphi=0}^{\pi} \bar{\alpha} \cdot dF_m \cos \varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \bar{\alpha} l_i \Delta p_{\varphi} r \cos \varphi \cdot d\varphi = l_i \bar{\alpha} r \frac{2B^2}{\mu_0^2} e \frac{dB}{dF} \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{\bar{\alpha} \pi D_1 l_i e}{2\mu_0^2} B^2 \frac{dB}{dF}$$

- r je poloměr induktu ve vzduchové mezeře

$$\text{➤ } D_1 = 2r \text{ a } \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{\pi}{2}$$



Magnetické síly v elektrických strojích

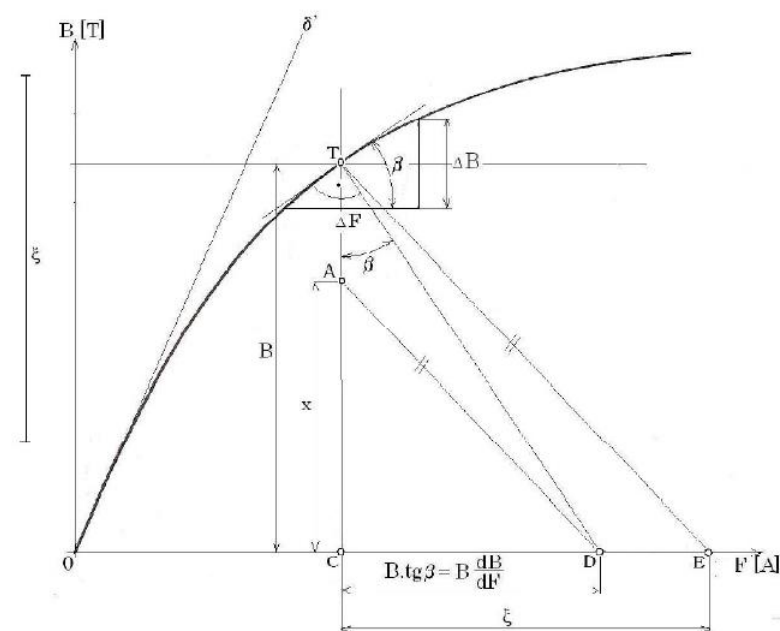
- **Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah**
- Výsledný magnetický tah na celém obvodu

$$F_m = \int_{\varphi=0}^{\pi} \bar{\alpha} . dF_m \cos \varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \bar{\alpha} l_i \Delta p_{\varphi} r \cos \varphi . d\varphi = l_i \bar{\alpha} r \frac{2B^2}{\mu_0^2} e \frac{dB}{dF} \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi . d\varphi = \frac{\bar{\alpha} \pi D_1 l_i e}{2 \mu_0^2} B^2 \frac{dB}{dF}$$

- r je poloměr induktu ve vzduchové mezeře

$$\triangleright D_1 = 2r \text{ a } \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi . d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

- Velikost UMP při dané e závisí na $B^2 \frac{dB}{dF}$



Magnetické síly v elektrických strojích

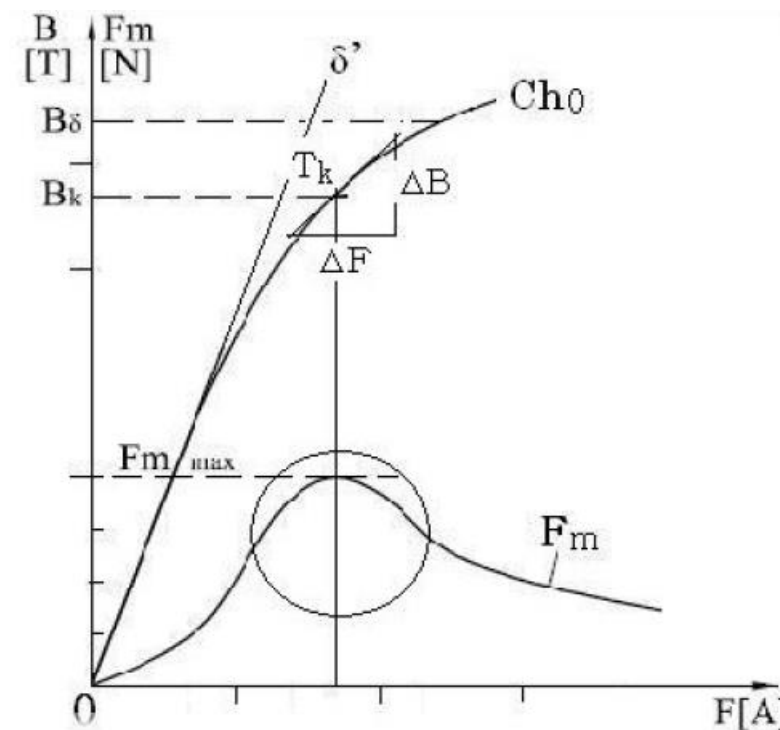
- **Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah**

- Kritická hodnota B_k a max. hodnota UMP

- Velikost UMP při dané e závisí na $B^2 \frac{dB}{dF}$

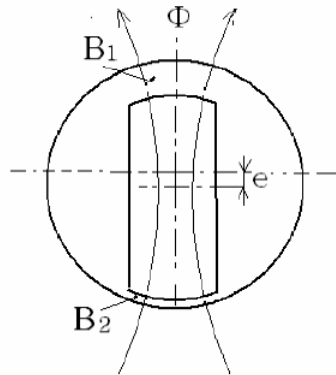
$$F_{mmax} = \frac{\bar{\alpha} \pi D_1 l_i e}{2 \mu_0^2} B_k^2 \left(\frac{\Delta B}{\Delta F} \right)_{B=B_k}$$

- úseky ΔB a ΔF jsou odvěsny libovolně velkého pravoúhlého trojúhelníka, jeho přepona je tečnou k charakteristice naprázdno v bodě B_k



Magnetické síly v elektrických strojích

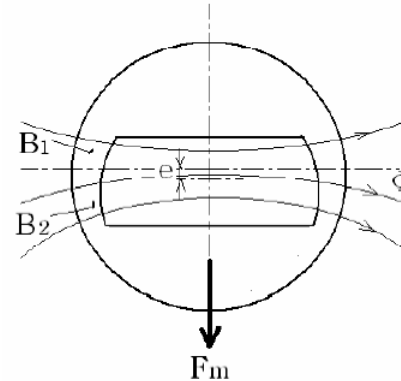
- Radiální magnetické síly – jednostranný magnetický tah
- Dvoupólové stroje



a) Excentricita ve směru osy pólu. $B_1=B_2$

$$B_1=B_2$$

$$F_m = 0$$



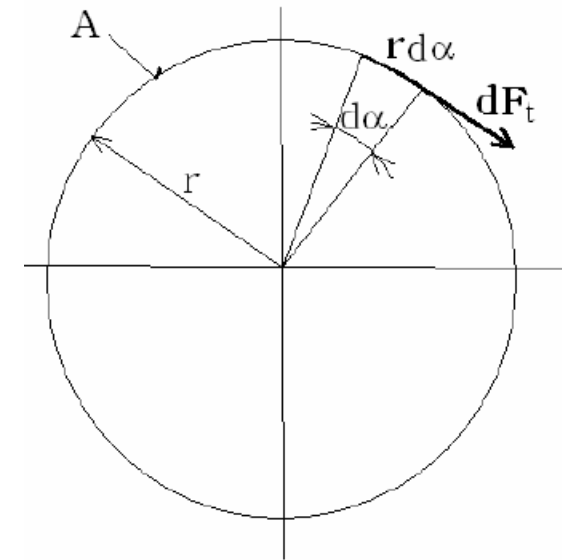
b) Excentricita ve směru kolmém na osu pólu. $B_2>B_1$

$$B_2>B_1$$

$$F_{m,2p=2} = (0,5 \div 0,6) F_{m,2p \rightarrow \infty}$$

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Tangenciální magnetické síly**
- Působí po obvodovém směru => vytváří moment (+ vibrace)
- Předpoklad:
 - Na povrchu induktu o poloměru r a délce l předpokládáme rovnoměrné rozložení proudu s obvodovou hustotou A
 - Proudovou vrstvou prochází magnetický tok Φ o indukci B
 - Na elementu obvodu $r.d\alpha$, který odpovídá elementárnímu úhlu $d\alpha$, je proudový obsah $A.r.d\alpha$ a působí na něj síla $dF_t = B_\delta . A.r.d\alpha.l$



- Celková obvodová síla
$$F_t = 2p.A.r.l. \int_0^{\frac{2\pi}{2p}} B.d\alpha$$

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Tangenciální magnetické síly**
- Průběh mag. indukce ve vzd. mezeře odlišný od sin průběhu => obtížný výpočet integrálu
- Tečná síla lze určit i z točivého momentu a průměru induktu

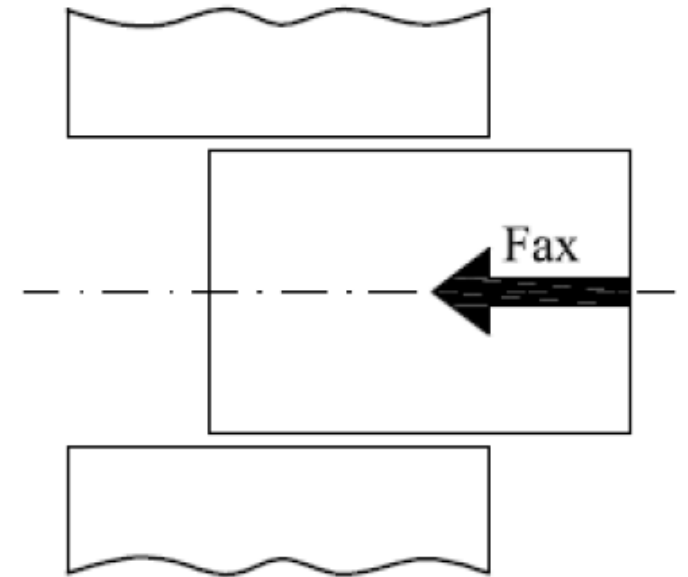
$$F_t = \frac{M}{D_1/2} = \frac{2M}{D_1}$$

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Axiální magnetické síly**
- Působí ve směru osy hřídele
- Dodatečné axiální namáhání ložisek
- Příčiny vzniku:
 - Vysunutý rotor ze statoru
 - Kuželový rotor i stator
 - Zešikmené drážky

Magnetické síly v elektrických strojích

- **Axiální magnetické síly – vysunutý rotor ze statoru**
- Výrobní chyba
- Rotor je magnetickým polem vtahován zpět do statoru
 - Snaha dosáhnout klidové polohy
 - Analogie solenoidu s vysunutým jádrem



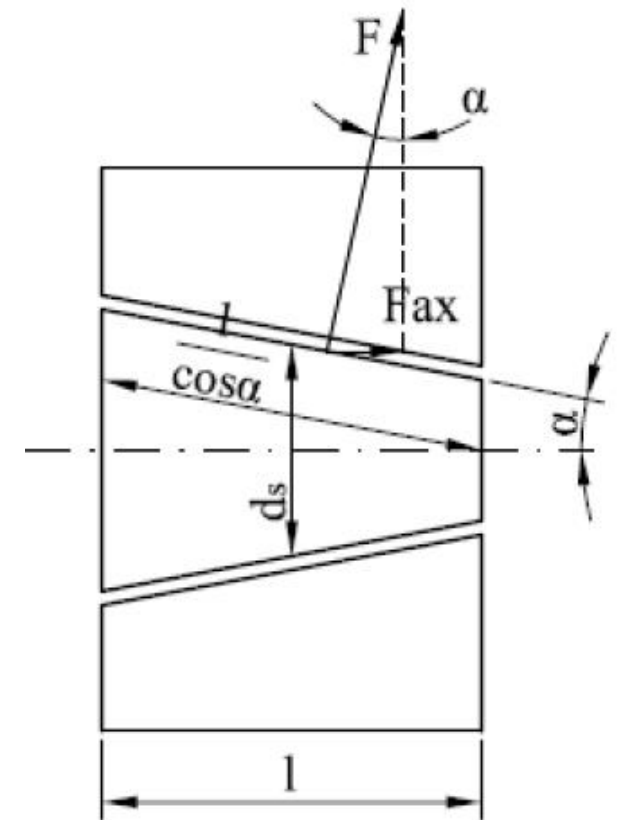
Magnetické síly v elektrických strojích

- **Axiální magnetické síly – kuželový rotor i stator**
- Axiální složka síly odvozena od radiální síly

$$F = \pi \cdot d_s \frac{l}{\cos \alpha} p_{stř}$$

$$F_{ax} = F \cdot \sin \alpha$$

- d_s je střední průměr rotoru, $p_{stř}$ je střední hodnota specifického magnetického tlaku

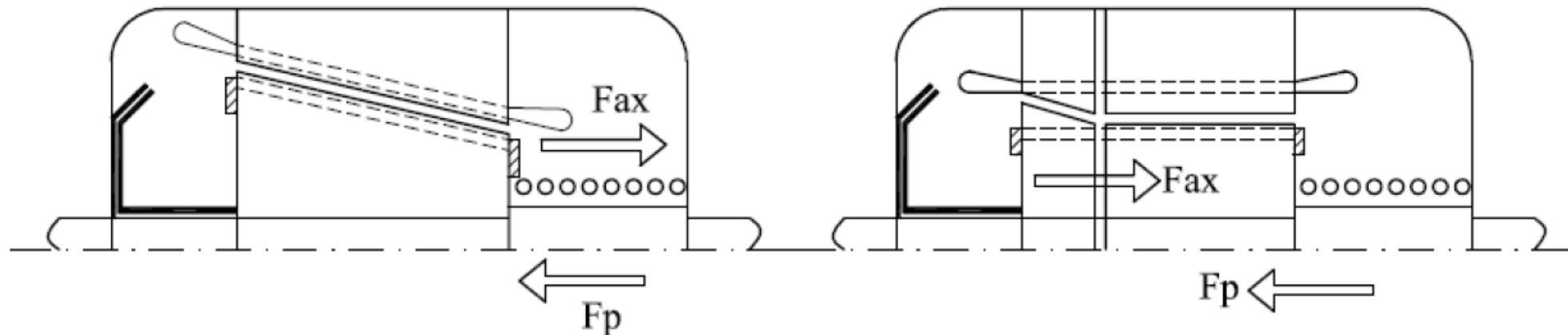


Magnetické síly v elektrických strojích

➤ Axiální magnetické síly – kuželový rotor i stator

➤ Použití u brzdového motoru

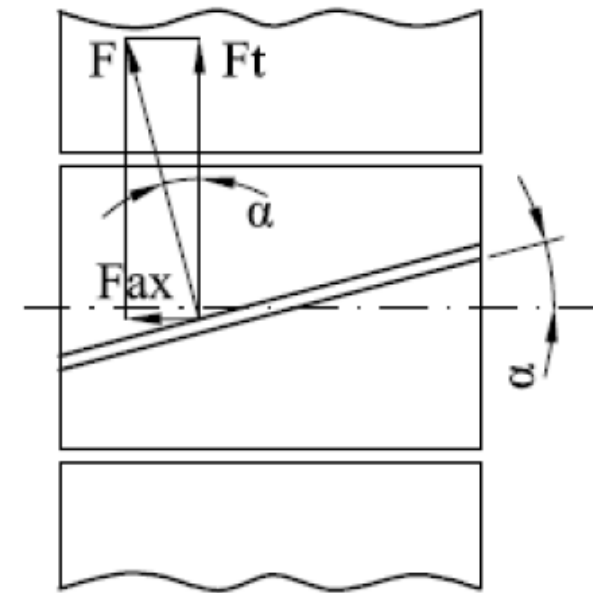
- Kuželový rotor posuvně uložen na hřídeli – pružinou přitlačován k brzdnému kotouči
- Axiální síla přemůže sílu pružiny => posunutí a odbrzdění rotoru
- Po odpojení napájení zánik síly => přitlačení zpět k brzdovému kotouči a rychlé zastavení
- Problematická výroba plechového svazku + nízké mag. využití (sycení) větších plechů



Magnetické síly v elektrických strojích

- **Axiální magnetické síly – zešikmení drážek**
- Zešikmení drážek na induktu (AM často rotor i stator)
 - Omezení hluku a vibrací
 - Omezení povrchových ztrát
 - Potlačení drážkové harmonické (zešikmení o jednu drážkovou rozteč)
- Axiální síla odvozena od tečné síly

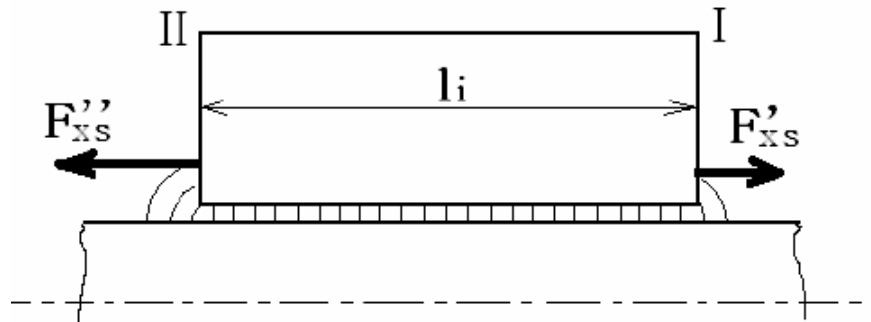
$$F_{ax} = F \cdot \sin \alpha = \frac{F_t}{\cos \alpha} \sin \alpha = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2M}{D} \operatorname{tg} \alpha$$



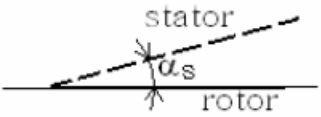
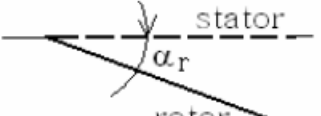
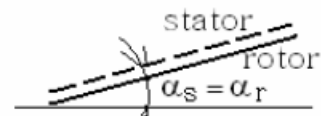
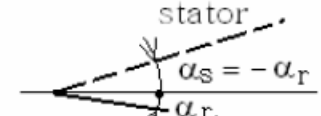
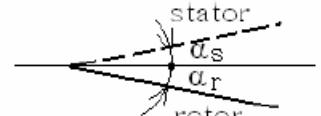
Magnetické síly v elektrických strojích

- **Axiální magnetické síly – zešíkmení drážek**
- V reálném uspořádání působí ještě axiální síla od okrajových polí na konci induktu
- Síla stejně veliká, ale opačně orientovaná => v některých případech může být výsledná síla nulová

$$F''_{xs} - F'_{xs} = -F_{ax}$$



Magnetické síly v elektrických strojích

Uspořádání	α_s	α_r	$-(F'_x - F''_x)$	$F_{ax(stat)}$	$F_{ax(výsl)}$
	α	0	$-\frac{1}{2}F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$	$F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{2}F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$
	0	$-\alpha$	$-\frac{1}{2}F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$	0	$-\frac{1}{2}F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$
	α	α	0	$F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$	$F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$
	α_s	α_r	$-\frac{1}{2}F_t (\operatorname{tg} \alpha_s - \operatorname{tg} \alpha_r)$	$F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_s$	$\frac{1}{2}F_t (\operatorname{tg} \alpha_s + \operatorname{tg} \alpha_r)$
	α	$-\alpha$	$-F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$	$F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$	0

Děkuji za pozornost

Jan Šobra

jsobra@fel.zcu.cz