

EUROPEAN UNION
European Structural and Investment Funds
Operational Programme Research,
Development and Education



the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Electrostatics and stationary current fields-examples

Modeling of multiphysics problems

Department of electrical engineering and computer modeling
Faculty of electrical engineering
University of West Bohemia in Pilsen

31. května 2021

Obsah

1 Typical Examples from Electrostatic Field

- Plate capacitor (Laplace's equation in Cartesian system)
- Cylindrical capacitor - two electrodes (Laplace's equation in cylindrical coordinate system)
- Cylindrical capacitor - two layers with corona discharge (Poisson's equation in cylindrical coordinate system)
- Plate capacitor - force between the electrodes
- High Voltage Insulator
- Einzel Lens
- Tunable MEMS Capacitor

EUROPEAN UNION
European Structural and Investment Funds
Operational Programme Research,
Development and Education

MINISTRY OF EDUCATION,
YOUTH AND SPORTS

Typical Examples from Electrostatic Field

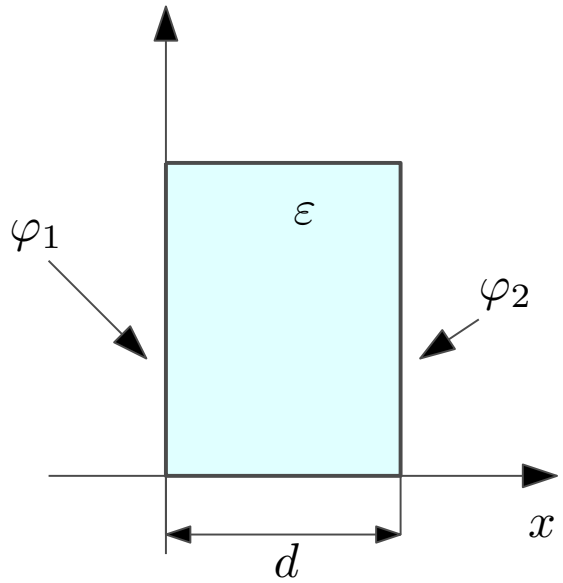
EUROPEAN UNION
European Structural and Investment Funds
Operational Programme Research,
Development and Education

MINISTRY OF EDUCATION,
YOUTH AND SPORTS

Typical Examples from Electrostatic Field

Plate capacitor (Laplace's equation in Cartesian system)

Consider the distribution of the electric potential of a plate capacitor with voltage $U = \varphi_2 - \varphi_1$ between the electrodes and their distance d.



Principiální schéma uspořádání

The potential distribution around an infinitely long ideal capacitor is described by Poisson's equation in the form

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}\,,$$

if we consider zero bulk charge density, it can be rewritten in the form of Laplace's equation

$$\Delta\varphi = 0\,.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Plate capacitor (Laplace's equation in Cartesian system)

In a 1D arrangement, the Laplace equation can be expressed in the form

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0\,.$$

After integration we will receive

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k_1\,.$$

We reintegrate the equation and obtain a general solution

$$\varphi = k_1 x + k_2\,.$$

The integration constants k_1 and k_2 are obtained from the boundary conditions. Then we get a set of equations

$$\varphi(0) = k_1 \cdot 0 + k_2 = \varphi_1$$
$$\varphi(d) = k_1 \cdot d + k_2 = \varphi_2.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

After computation we will receive

$$k_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} \qquad k_2 = \varphi_1 .$$

The resulting solution can be written in the form

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} x + \varphi_1 .$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Cylindrical capacitor - two electrodes (Laplace's equation in cylindrical coordinate system)

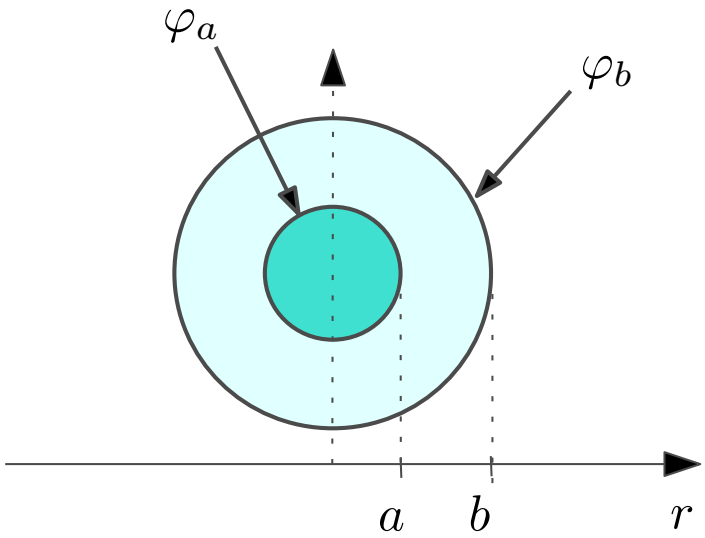
Consider the electric potential distribution of a cylindrical capacitor with radii a and b with a known potential value at the inner and outer electrodes.

The potential distribution around an infinitely long ideal capacitor is described by Poisson's equation in the form

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}\,.$$

A potential is a scalar field that generally depends on spatial coordinates

$$\varphi = \varphi(r, \theta, z).$$



Principiální schéma uspořádání

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Cylindrical capacitor - two electrodes (Laplace's equation in cylindrical coordinate system)

Assume that the value of the potential depends only on the coordinate r (consider an infinitely long cylinder) and that there are no charges in the space between the electrodes. Then we can start from Laplace's equation

$$\Delta\varphi = 0.$$

The one-dimensional equation in the radial direction can then be written in the form

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0.$$

If $r \neq 0$, it applies

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0.$$

We integrate the equation

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = k_1$$

and adjust

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{k_1}{r}.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

After the subsequent integration, we receive a general solution for the potential

$$\varphi = k_1 \ln r + k_2 \, .$$

The integration constants k_1 and k_2 are obtained from the boundary conditions. Then we get a set of equations

$$\varphi(a) = k_1 \ln a + k_2 = \varphi_a$$
$$\varphi(b) = k_1 \ln b + k_2 = \varphi_b .$$

After substitution we will receive

$$k_1 = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{\ln \frac{b}{a}} \qquad k_2 = \frac{\varphi_a \ln b - \varphi_b \ln a}{\ln \frac{b}{a}} .$$

The resulting potential solution can be written in the form

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{\ln \frac{b}{a}} \ln r + \frac{\varphi_a \ln b - \varphi_b \ln a}{\ln \frac{b}{a}} .$$

If the outer electrode is grounded $\varphi_b = 0$, then the voltage between the electrodes would be $U = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a$ and the resulting relationship would be simplified

$$\varphi(r) = U_0 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} .$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

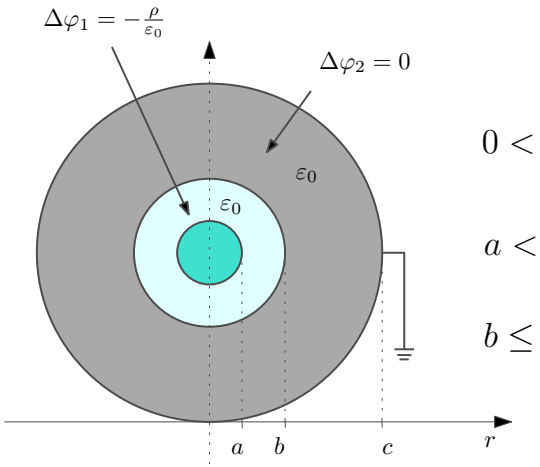
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Cylindrical capacitor - two layers with corona discharge (Poisson's equation in cylindrical coordinate system)

Consider an infinitely long bundle conductor of circular cross-section with an equivalent radius a placed in the air at a sufficient distance above the ground. The conductor voltage to ground U and the marked radii a, b, c are entered. Corona discharges often occur on conductors of this type. The discharge with bulk charge density ρ was considered between radii a and b.



$0 < r \leq a$ ... **vodič**

$a < r < b$ ... **vzduch s korónovým výbojem**

$b \leq r \leq c$ ... **vzduch**



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Cylindrical capacitor - two layers with corona discharge (Poisson's equation in cylindrical coordinate system)

The potential distribution around an infinitely long conductor is described by the Poisson's equation in the form

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}\,.$$

The one - dimensional general solution of this equation in the radial direction can be written as

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}\,.$$

We integrate the equation

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{r^2}{2} + k_1.$$

Let's adjust

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{r}{2} + \frac{k_1}{r}.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

After integration, we get a general solution for potential

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} + k_1 \ln r + k_2 \,,$$

where k_1 and k_2 are constants. The resulting solution of the potential is a solution in two sub-areas, where the first of them can be written

$$\varphi_1 = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + k_{11} \ln r + k_{12}$$

and for the second it applies

$$\varphi_2 = k_{21} \ln r + k_{22} \,.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

The intensity of the electric field can be expressed in individual environments

$$E_{r,1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\frac{\rho r}{2\varepsilon_0} + \frac{k_{11}}{r}$$

and

$$E_{r,2} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{k_{21}}{r} \,.$$

The integration constants k_{11}, k_{12}, k_{21} and k_{22} are obtained from the boundary condition, the potential continuity condition and the interface condition. After substituting we get a system of equations in the form

$$\begin{bmatrix} \ln a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln c & 1 \\ -\ln b & -1 & \ln b & 1 \\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0} \\ 0 \\ \frac{\rho b^2}{4\varepsilon_0} \\ \frac{\rho b}{2\varepsilon_0} \end{bmatrix} . \tag{1}$$

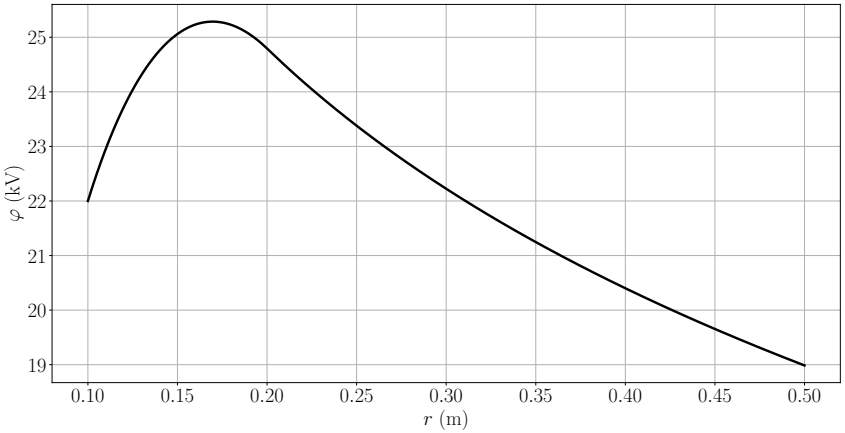
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

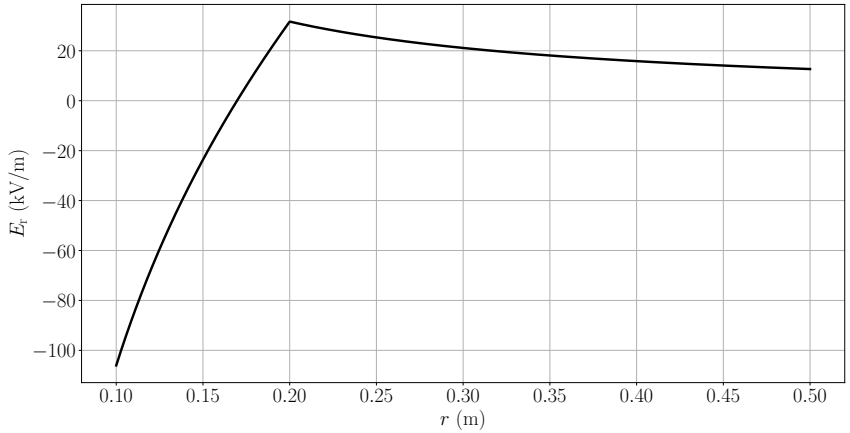
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Cylindrical capacitor - two layers with corona discharge (Poisson's equation in cylindrical coordinate system)





the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Potential (left) and electric field strength (right) around an infinitely long conductor.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

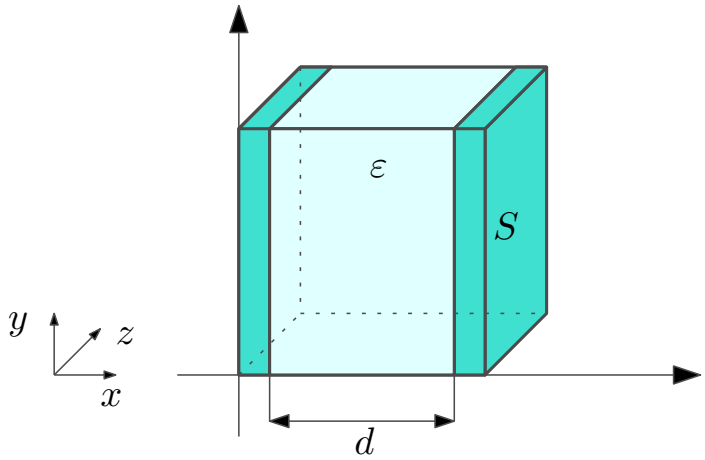
the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Plate capacitor - force between the electrodes

Determine the force F_x acting on the electrodes of a plate capacitor with dimensions d, S and permittivity ε and consider:

- **a)** Constant charge of electrodes Q.
- **b)** Constant voltage between electrodes U.



Principiální schéma uspořádání

a) Constant charge of electrodes Q:

For the first case, we start from Gauss's law:

$$Q = \oint_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

The intensity of the electric field can be expressed as

$$E_x = \frac{Q}{\varepsilon S}.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

The density of electric energy is then determined as

$$w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{Q^2}{2\varepsilon S^2},$$

then the energy of the electric field will be obtained by integrating the density w_e over the volume of the dielectric:

$$W_e = \int_V w_e \, \mathrm{d}V = \frac{Q^2}{2\varepsilon S^2} \cdot Sd = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon S}.$$

The force acting on the electrodes is a partial derivative of this energy based on its direction. In this case, the direction is represented by dimension d. Since we have a constant charge Q, the sign belongs to the sign $(-)$.

$$F_x = -\frac{\partial W_e}{\partial d} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon S}.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

b) Constant voltage between electrodes U:

We start from the relation for the intensity of the electric field. From the definition relation for stress and subsequent integration we obtain

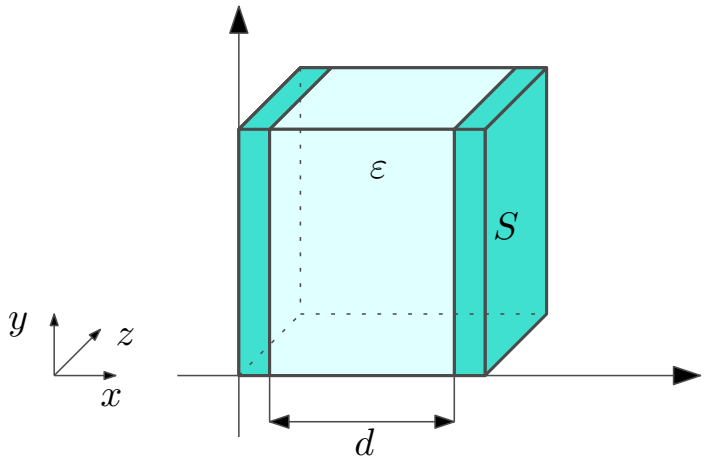
$$U = \int_0^d E_x \,\mathrm{d}x = \int_0^d \frac{Q}{\varepsilon S}\,\mathrm{d}x = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

After substituting for the charge Q we get the intensity of the electric field as

$$E_x = \frac{U}{d}.$$

The density of electric energy will be

$$w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{\varepsilon U^2}{2d^2}.$$



Principiální schéma uspořádání

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

The energy of the electric field is again an integration of density w_e over the volume of the dielectric:

$$W_e = \int_V w_e \, \mathrm{d}V = \frac{\varepsilon U^2}{2d^2} \cdot Sd = \frac{\varepsilon U^2 S}{2d}.$$

The force acting on the electrodes will again be a partial derivative of the energy according to the distance of the electrodes d, for a constant voltage we now choose the sign $(+)$.

$$F_x = \frac{\partial W_e}{\partial d} = -\frac{\varepsilon U^2 S}{2d^2}.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

High Voltage Insulator

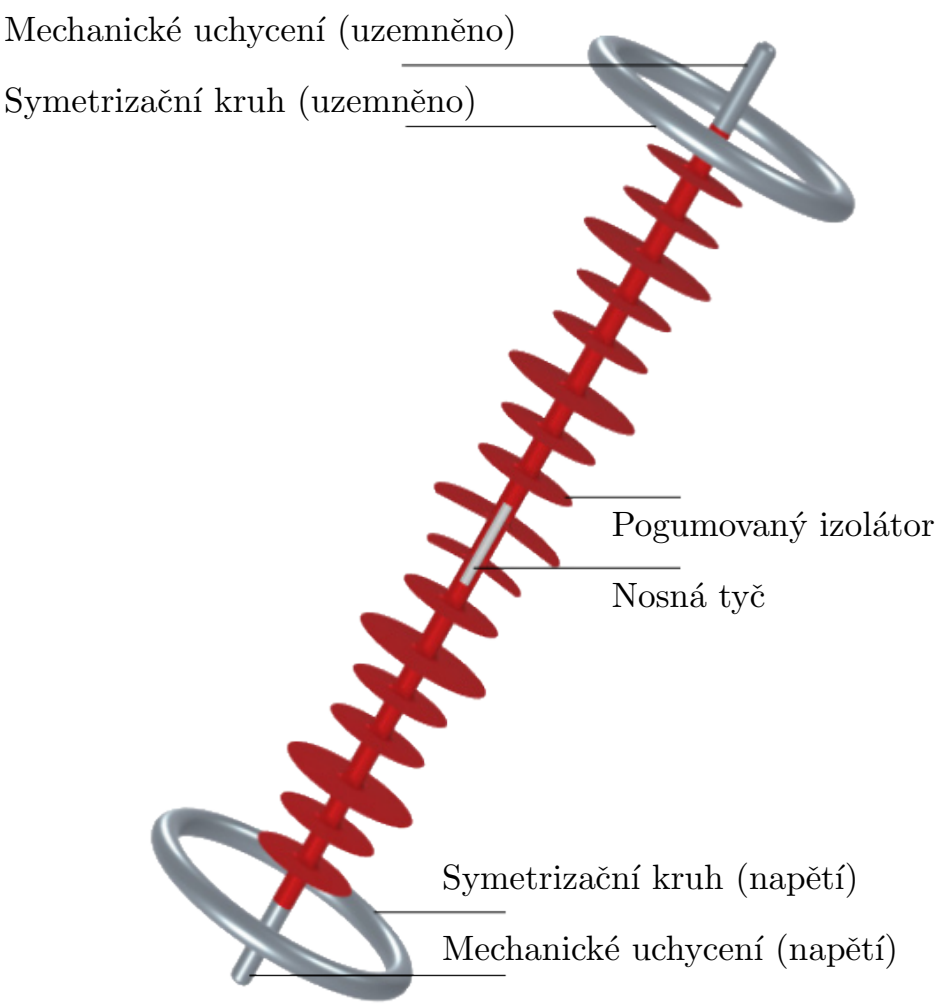
Insulators are used for mechanical and electrical separation of high voltage conductors from the tower. A typical insulator is usually made of glass, porcelain or a composite polymer. It is protected from the effects of weather by silicone.

The electric field around it is not uniformly distributed and can lead to corona and overvoltage. Uniform distribution can be achieved using symmetrization rings. The

electric field is described by Laplace's equation in the form

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = 0$$

supplemented by correct boundary conditions. The upper part is grounded and the lower part is on the potential of 110 kV.



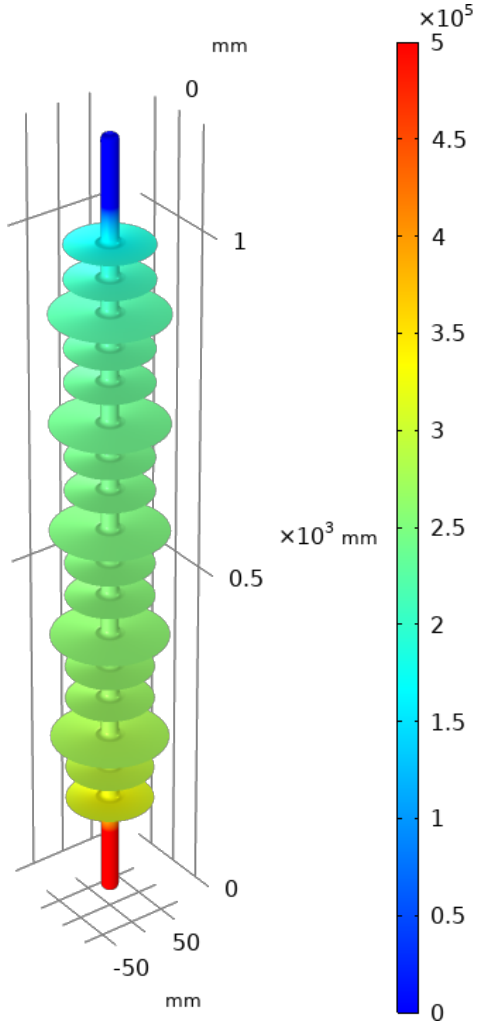
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

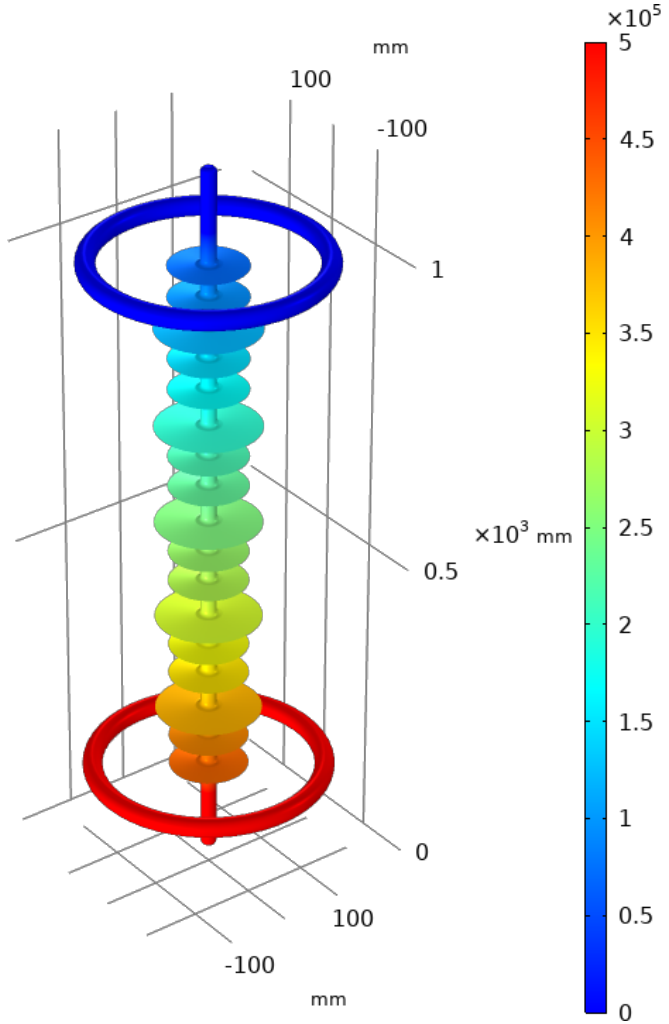
the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

High Voltage Insulator



Distribution of electric field without circle



Electric field distribution with circle

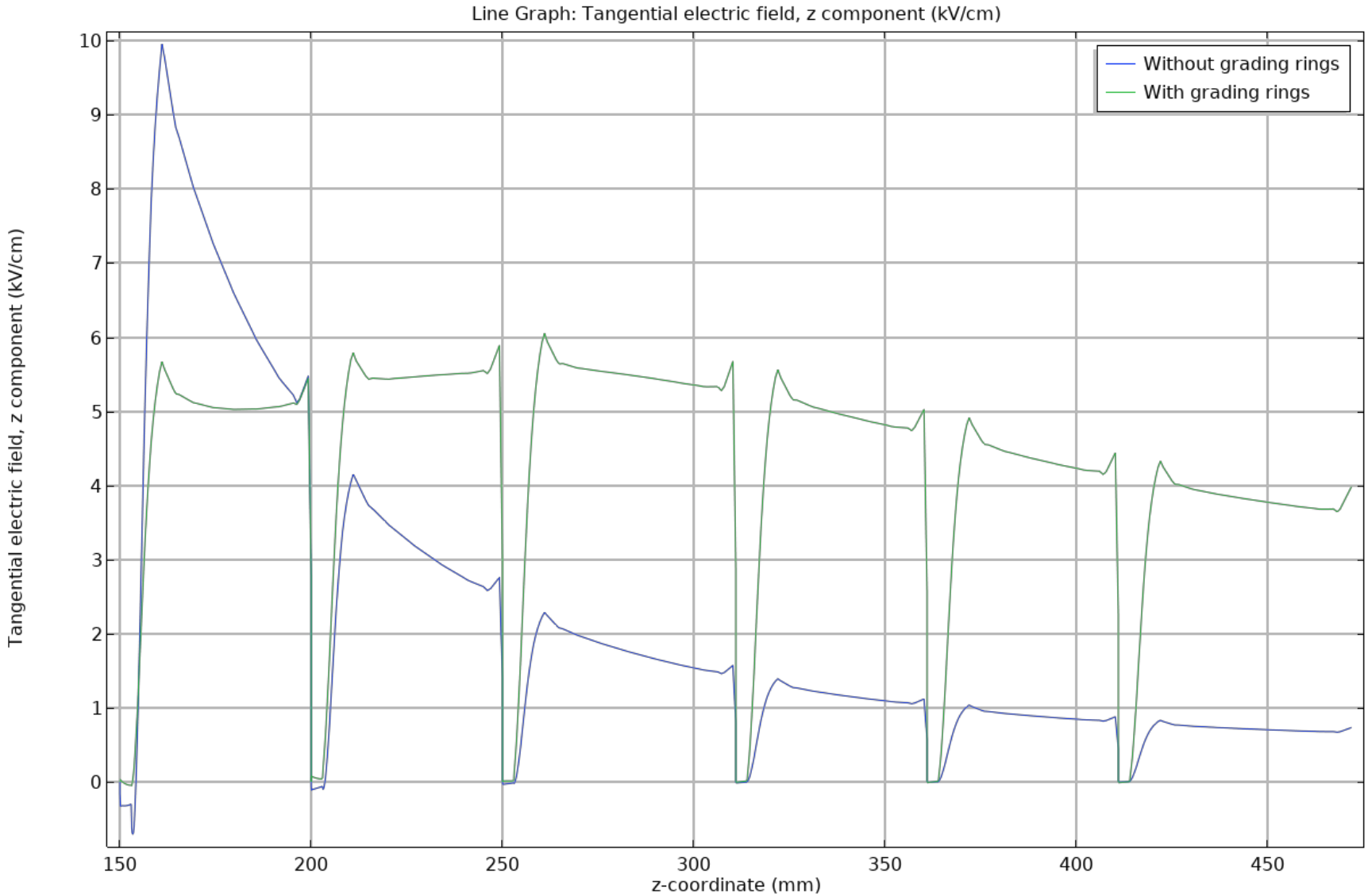
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

High Voltage Insulator

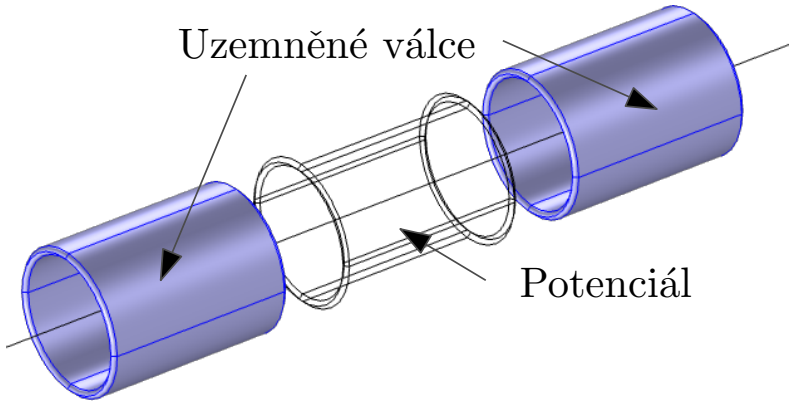


EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Einzel lens
An Einzel lens is a device that uses an electrostatic field to focus a beam of charged particles into a single point. It consists of three cylinders. Both end cylinders are grounded and the inner cylinder has a nonzero potential. By the action of the Lorentz force on the charged particles, the beam is deflected.



The electric field is described by Laplace's equation in the form

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = 0$$

supplemented by the boundary conditions. The inner cylinder has a potential of -10 kV.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Due to the speeds approaching the speed of light, a relativistic weight correction in the shape must be entered into the model

$$m_{\mathrm{p}} = \frac{m_{\mathrm{r}}}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}},$$

where m_{r} is the rest mass of the electron, $\boldsymbol{v}$ is the speed of motion of the particle and c is the speed of light.

The motion of particles is described by Newton's laws of motion in the form

$$\frac{\mathrm{d}(m_{\mathrm{r}}\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{L}} = Q\boldsymbol{E}$$

and

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v},$$

where $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}$ is the Lorentz force. Q is the charge of the particle and $\boldsymbol{E}$ is the intensity of an electric field.

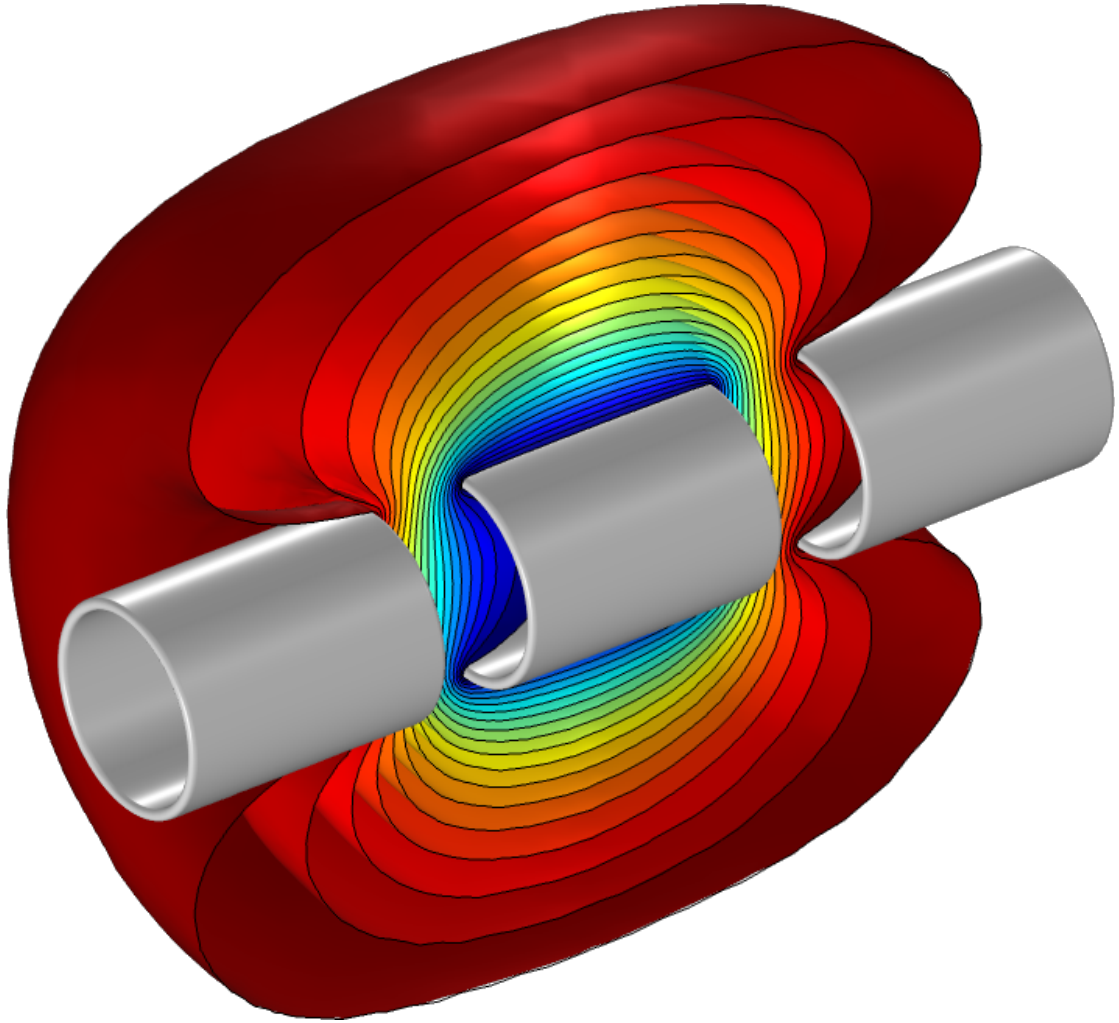
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Einzel Lens



Electric field distribution

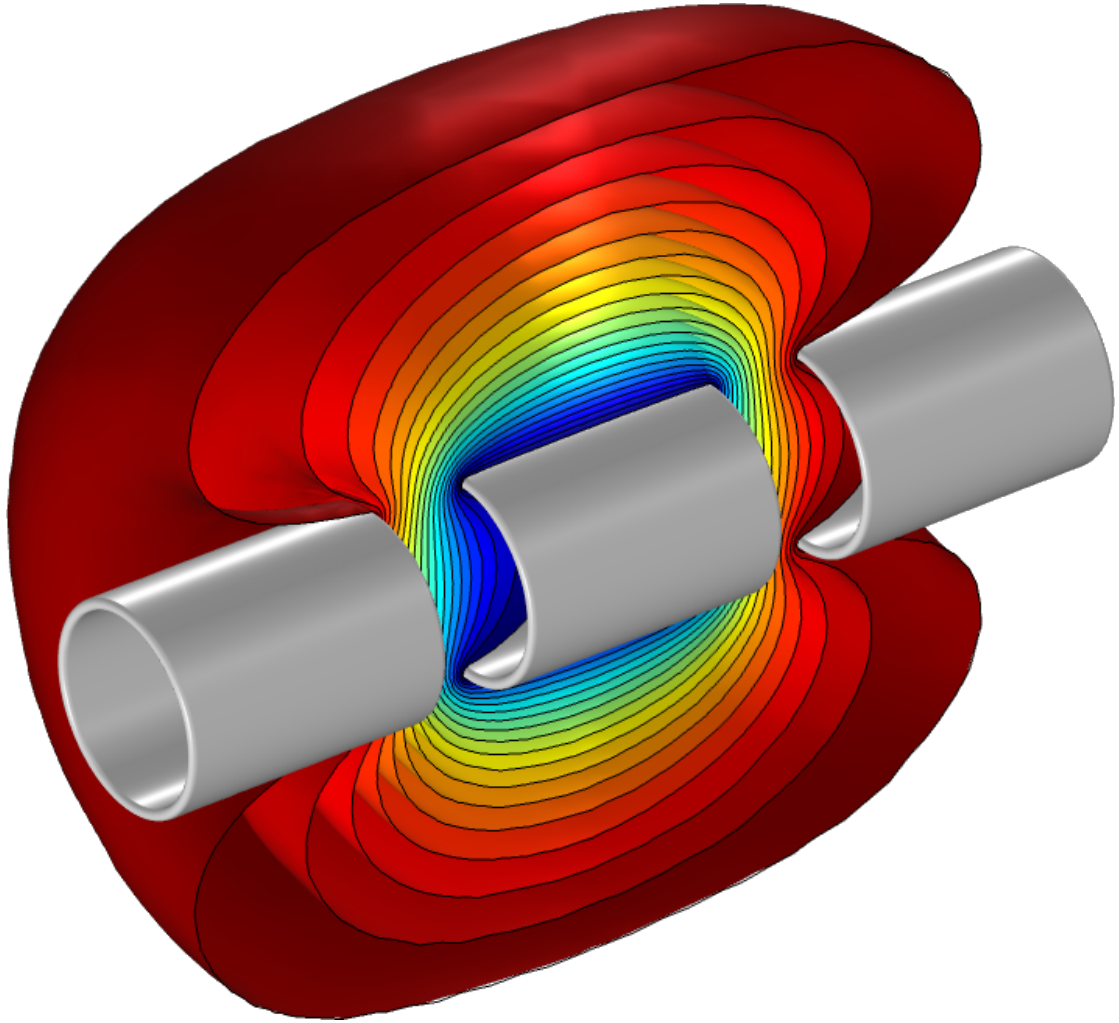
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Einzel Lens



Electric field distribution

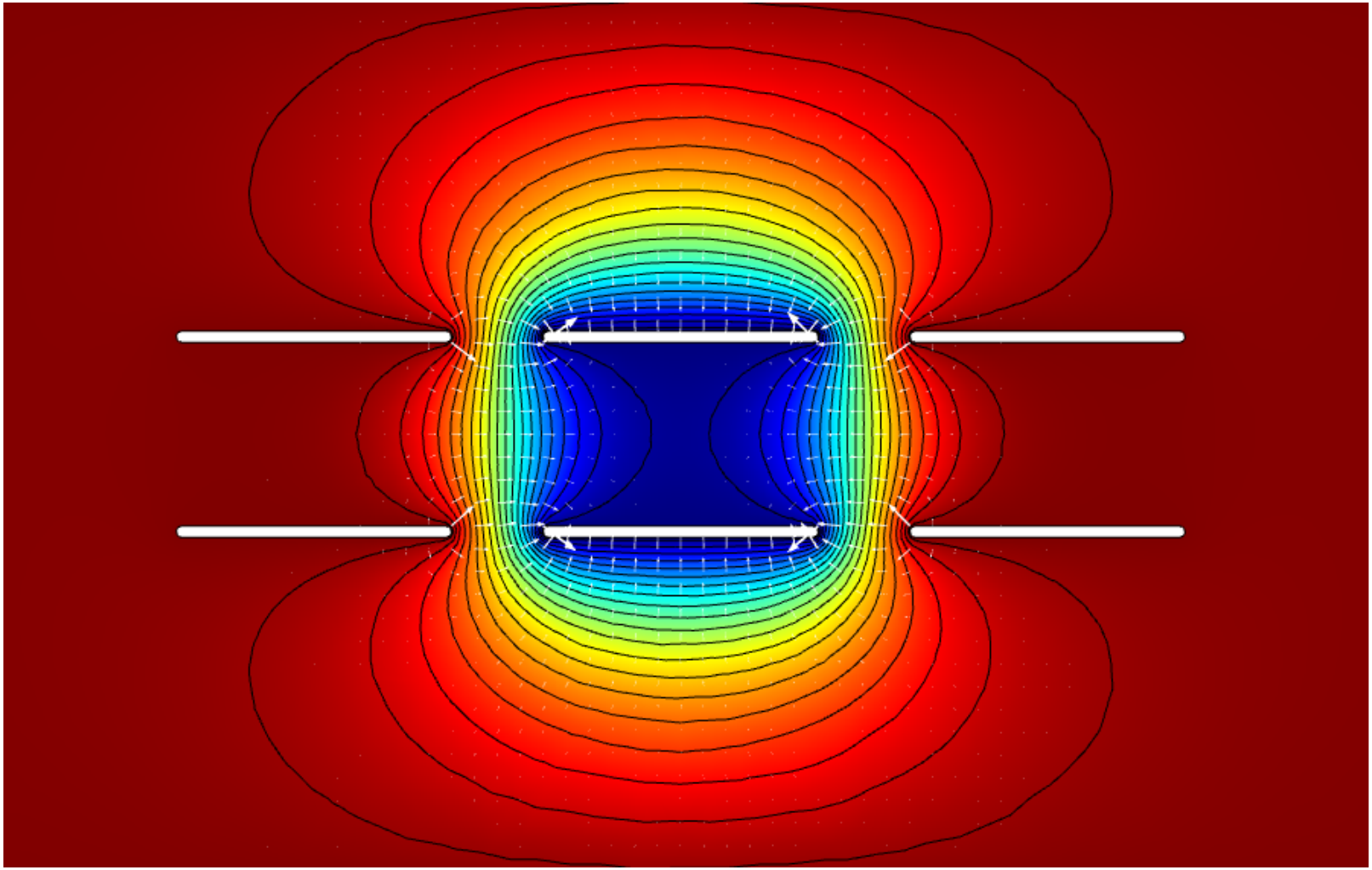
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Einzel Lens



Distribution of electric field and its vectors

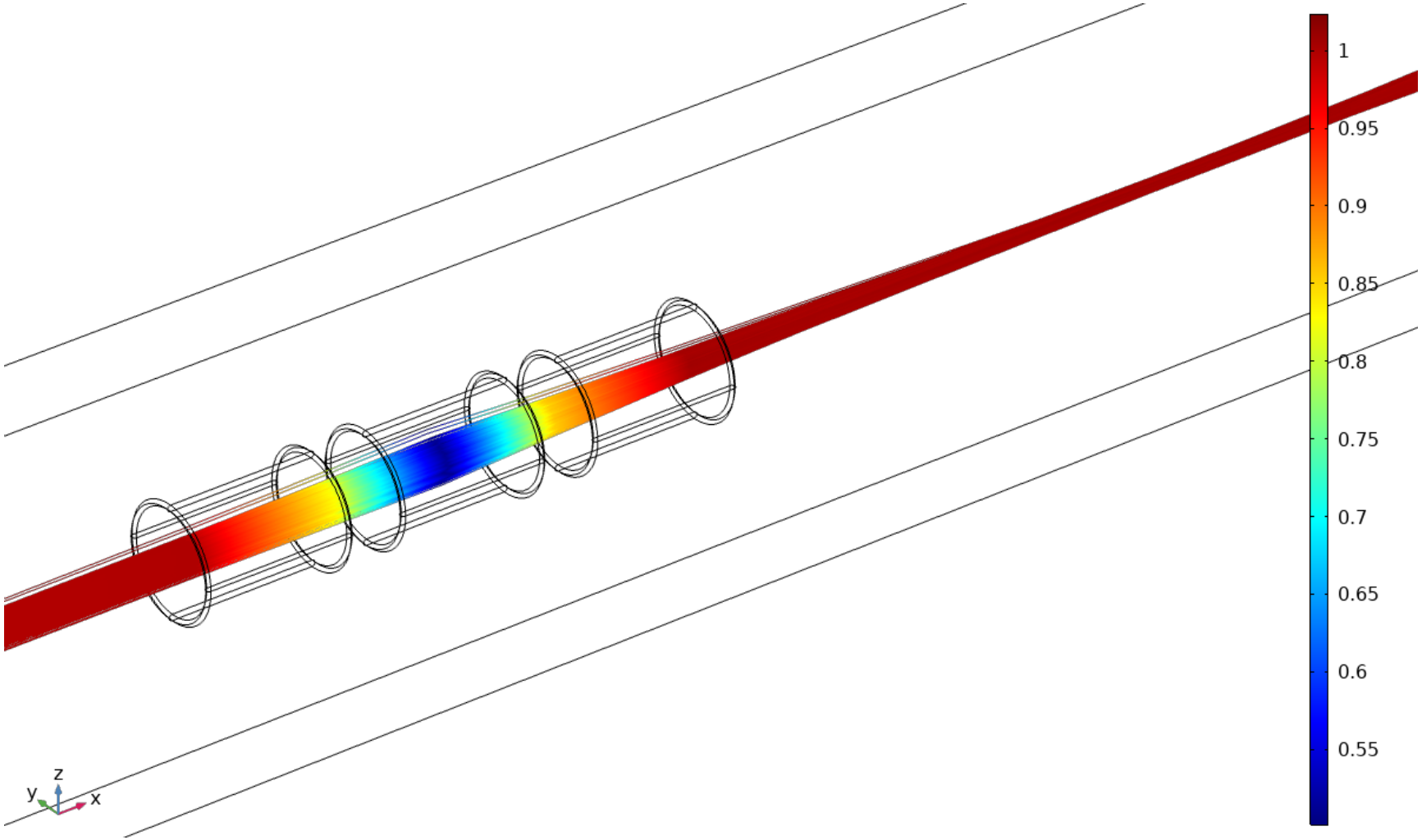
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Einzel Lens



Focused beam of charged particles

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

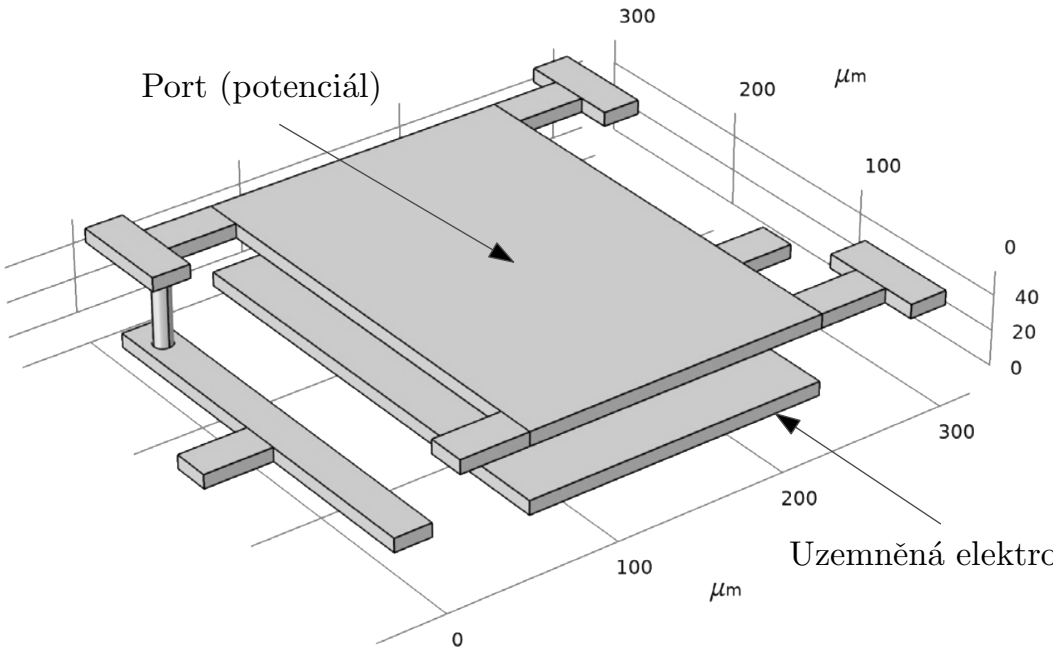
the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Tunable MEMS capacitor
With a tunable MEMS capacitor, the distance between the electrodes can be set using the voltage between them. Depending on the applied voltage, a charge of opposite polarity is induced on the electrodes and the electrodes are attracted to each other. A spring is usually connected to one of the electrodes for easy distance adjustment.

The electric field is described by Laplace's equation in the form

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = 0$$

supplemented by boundary conditions.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

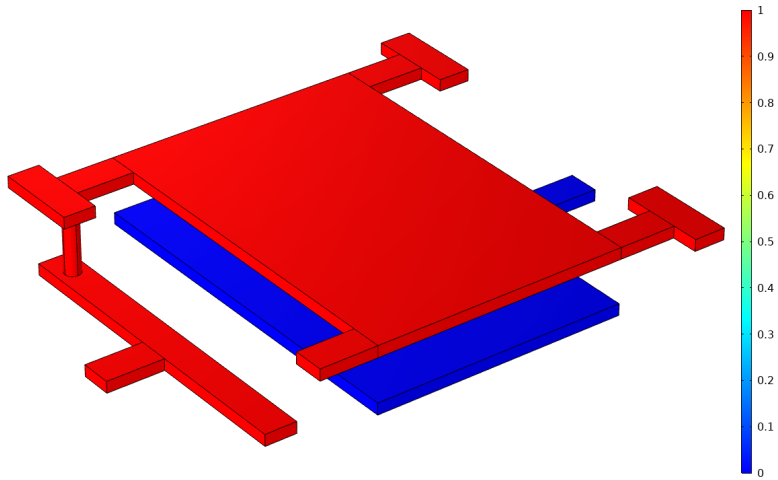
Tunable MEMS Capacitor

The upper electrode is at a potential of 1 V. The force acting on the electrodes can be calculated from the total energy of the field

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} = -\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}},$$

where the electric energy can be expressed as

$$W_{\mathrm{e}} = \int_V w_{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2} ED\,\mathrm{d}V.$$



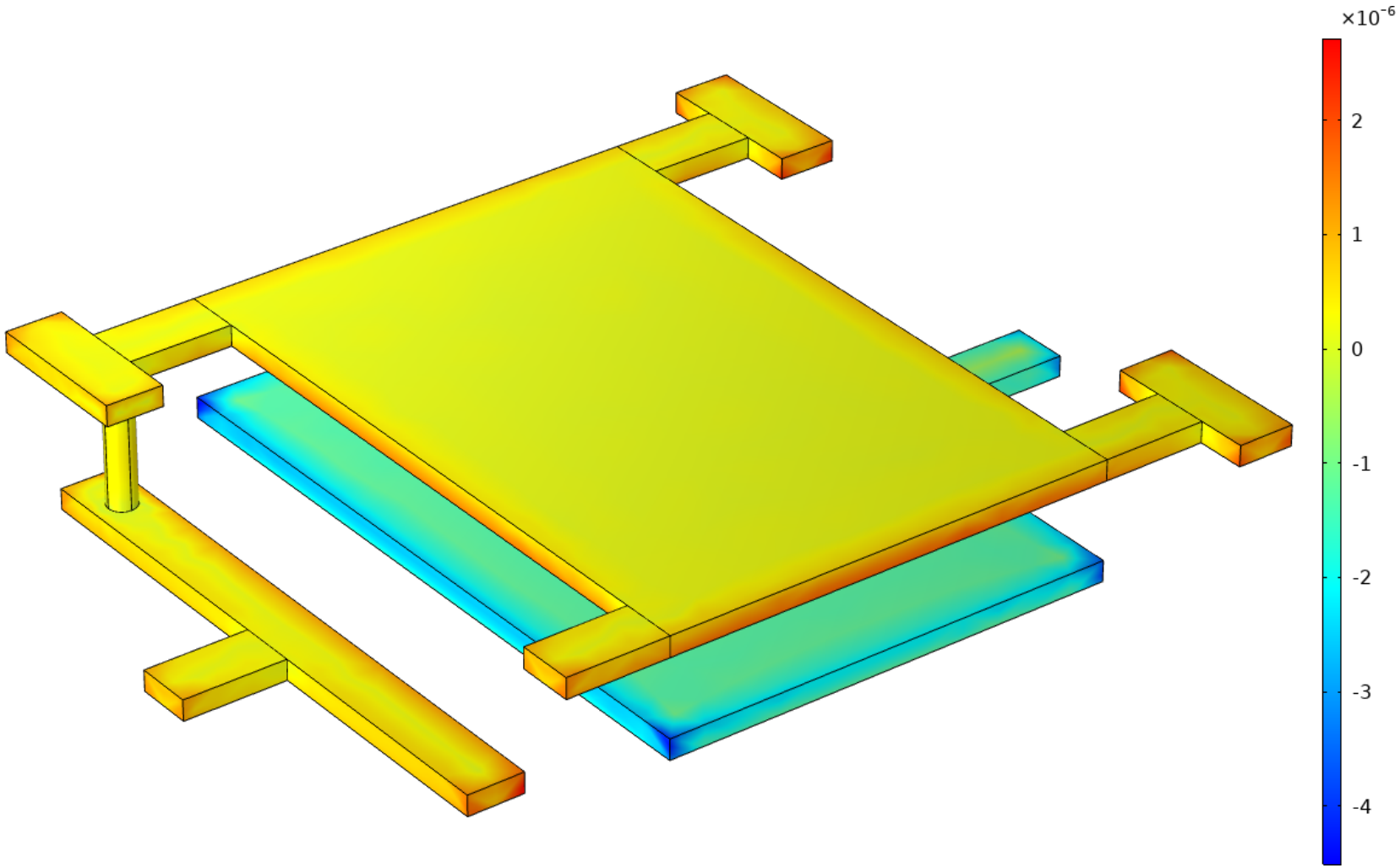
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Tunable MEMS Capacitor



Charge density distribution on electrodes

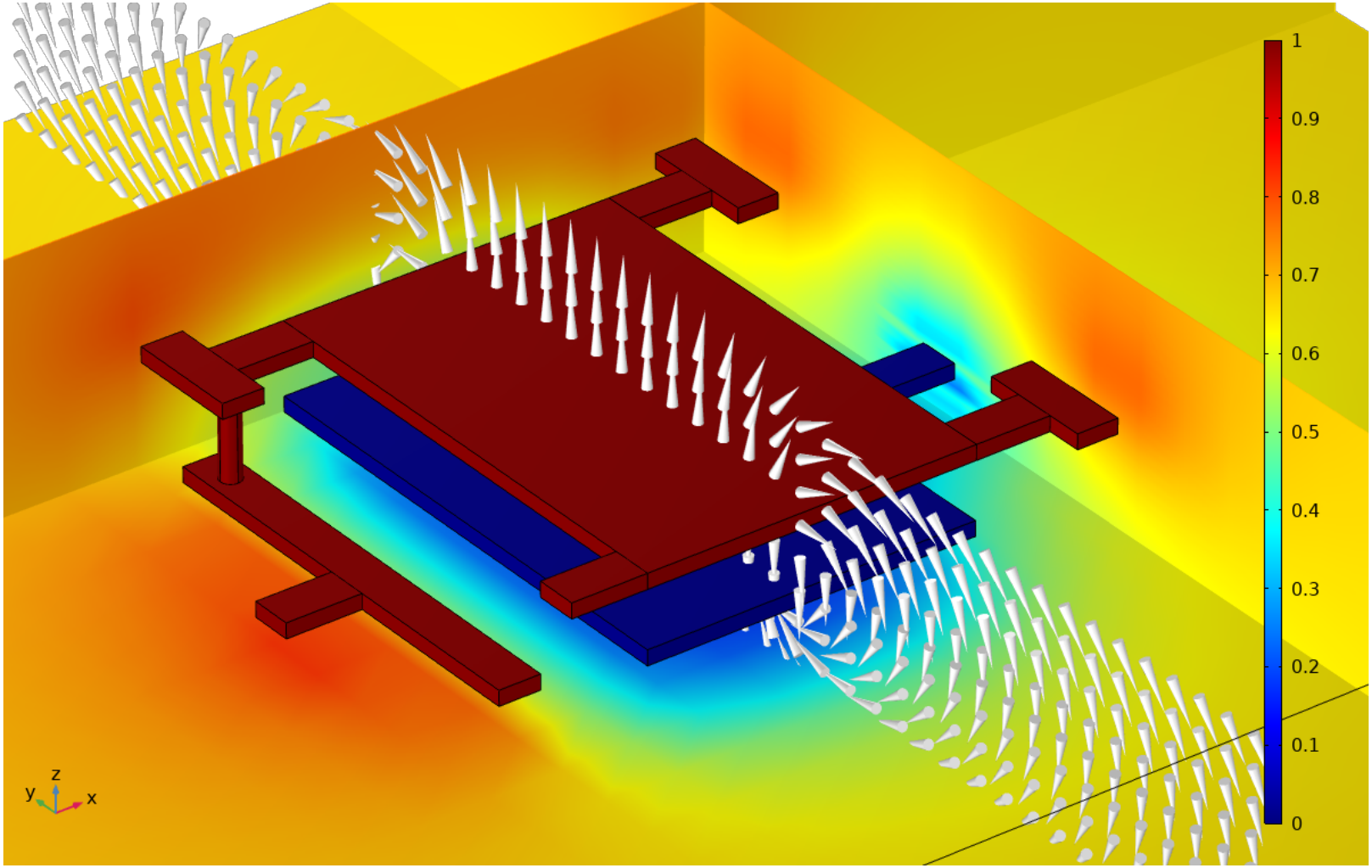
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Tunable MEMS Capacitor



Potential and electric field distribution

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Examples from electric current field

Typical examples focused on electric current field (analytical solution)

- Cylindrical capacitor with imperfect insulation (Laplace's equation in a cylindrical system)

Practical examples focused on electric current field

- Planar Coil on PCB
- Lamellar busbar

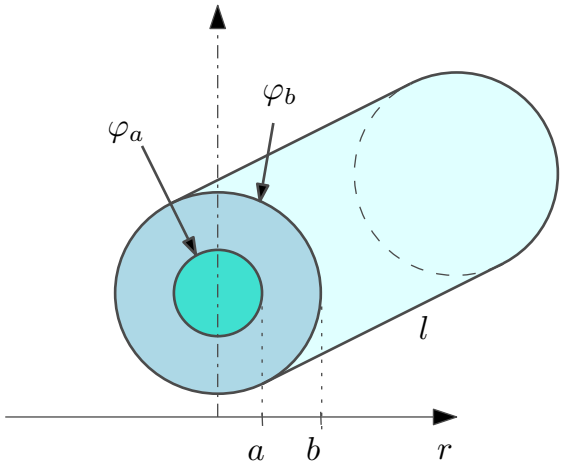
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Cylindrical capacitor with imperfect insulation - two layers (Laplace's equation in cylindrical coordinate system)

Consider the electric potential distribution of a cylindrical capacitor with imperfect insulation with radii a and b with a known value of the potential at the inner and outer electrodes. Find the insulation resistance.



Principal arrangement

For the solution, we again start from the equation for potential. A potential is a scalar field that generally depends on spatial coordinates

$$\varphi = \varphi(r, \theta, z).$$

For the solution, we proceed as in the example on page 10 from Laplace's equation:

$$\Delta\varphi = 0.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

After several adjustments, as in the previous case, we get a general solution for the potential:

$$\varphi = k_1 \ln r + k_2 \, .$$

The integration constants k_1 and k_2 are obtained from the boundary conditions. Then we get a set of equations

$$\varphi(a) = k_1 \ln a + k_2 = \varphi_a$$
$$\varphi(b) = k_1 \ln b + k_2 = \varphi_b .$$

After substitution we will receive

$$k_1 = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{\ln \frac{b}{a}} \qquad k_2 = \frac{\varphi_a \ln b - \varphi_b \ln a}{\ln \frac{b}{a}} .$$

The resulting potential solution can be written in the form

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{\ln \frac{b}{a}} \ln r + \frac{\varphi_a \ln b - \varphi_b \ln a}{\ln \frac{b}{a}} .$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

We start from a relationship for scalar electric potential

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi.$$

After substituting the relation for the scalar potential, we get the expression

$$\boldsymbol{J} = -\gamma \mathrm{grad}\,\varphi.$$

Let's adjust

$$J = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\gamma k_1 \frac{1}{r} = -\gamma \frac{\varphi_b - \varphi_a}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r}.$$

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

We determine the current from the relation

$$I = \int_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^l J_r r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}l = \int_0^{2\pi}\int_0^l \gamma\frac{\varphi_b-\varphi_a}{r\ln\frac{b}{a}} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}l = \gamma\frac{\varphi_b-\varphi_a}{\ln\frac{b}{a}}2\pi l = \gamma\frac{U}{\ln\frac{b}{a}}2\pi l.$$

where r is the Jacobian of transformation into cylindrical coordinates.

We determine the resistance from Ohm's law

$$R = \frac{U}{I},$$

then

$$R = \frac{U}{\gamma\frac{U}{\ln\frac{b}{a}}2\pi l} = \frac{\ln\frac{b}{a}}{\gamma 2\pi l}.$$

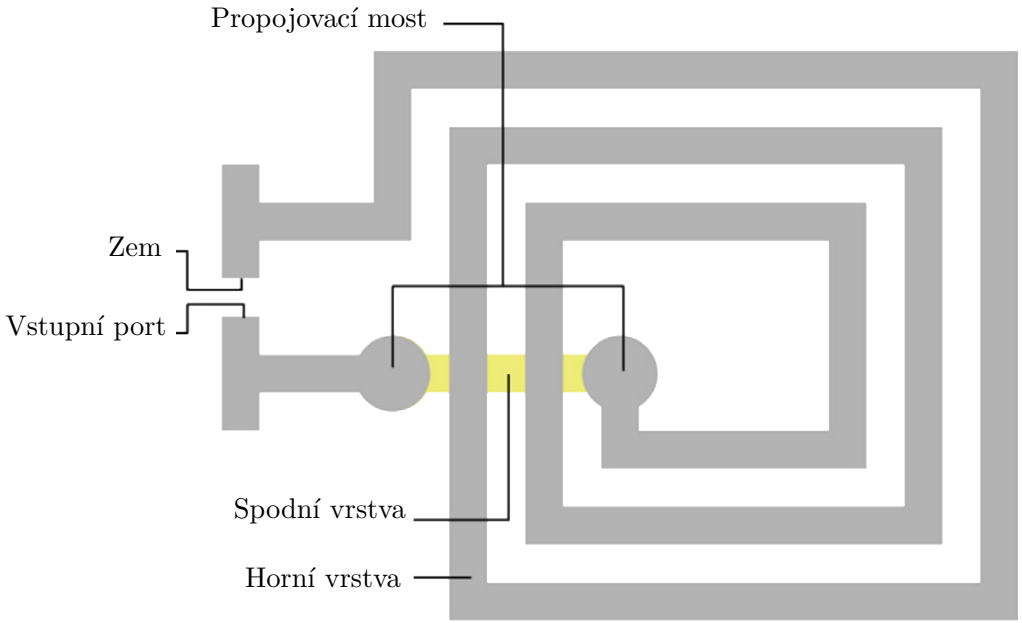
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Planar coil on PCB

Planar coils, which are implemented on a printed circuit board, are often used especially in high frequency applications. The coil consists of its turns and two leads. An electric current field model can be used to calculate the current distribution in the conductive path. To determine the inductance, it is necessary to extend the calculation by a magnetic field (not a part of this example).



The electric current field is described by Laplace's equation in the form

$$\operatorname{div} \gamma \operatorname{grad} \varphi = 0$$

supplemented by boundary conditions.

A current of 1 A is injected into the input port. The thickness of the conductive path is 0.1 mm. The resistivity of the path can then be determined from Ohm's law

$$R = \frac{U}{I}.$$

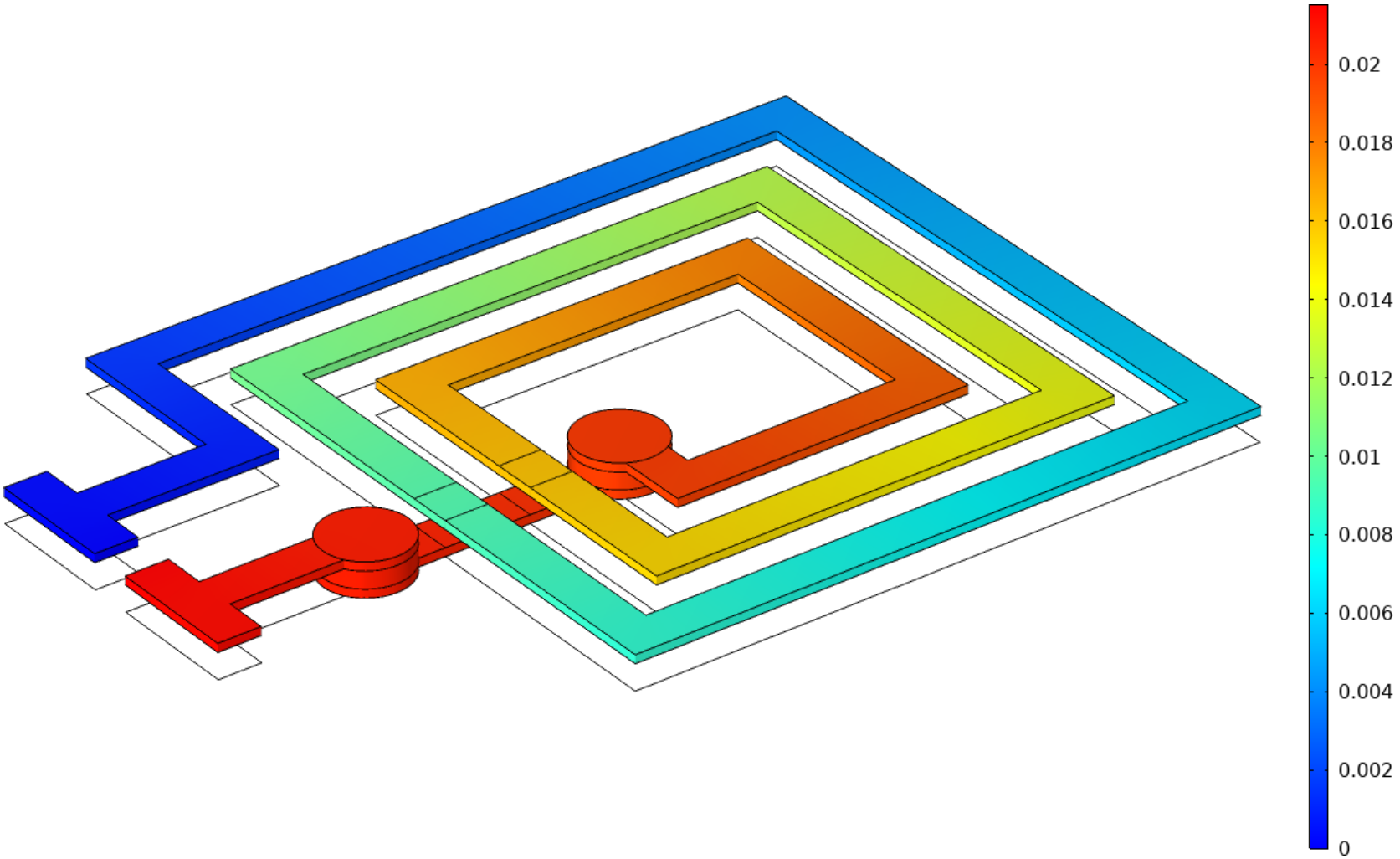
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Planar Coil on PCB



Potential distribution

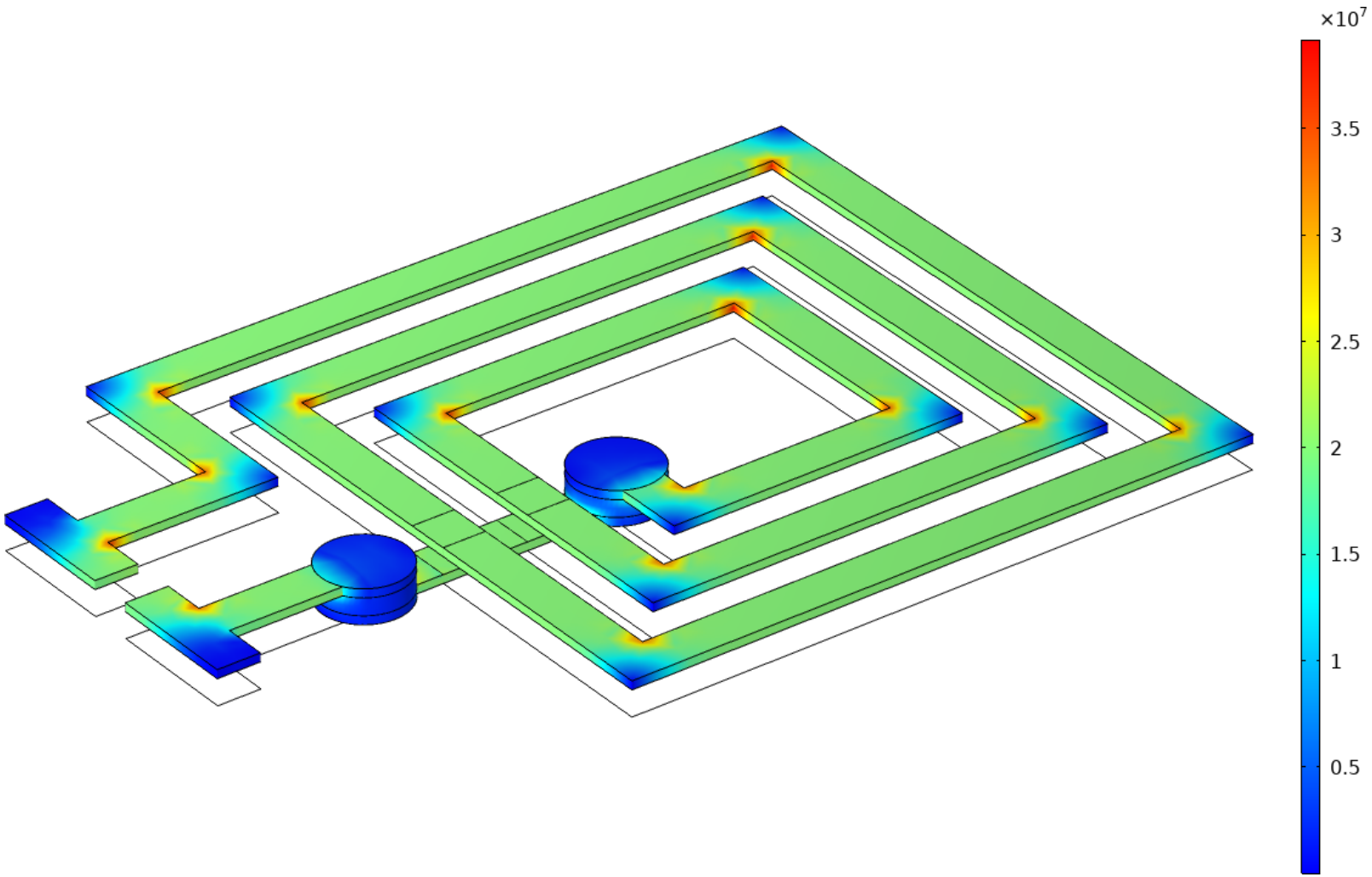
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Planar Coil on PCB



Current density distribution

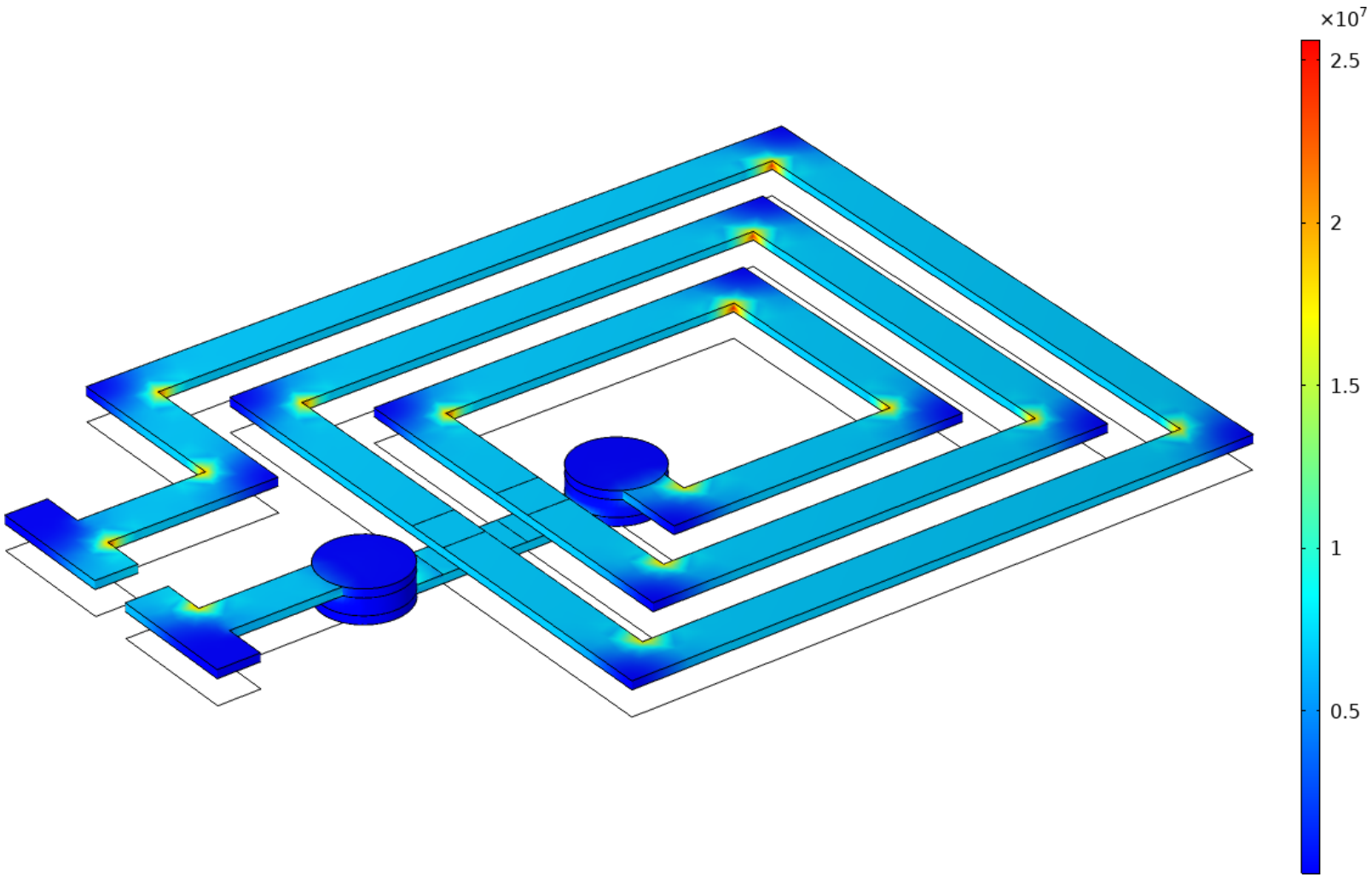
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Planar Coil on PCB



Distribution of heat losses

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

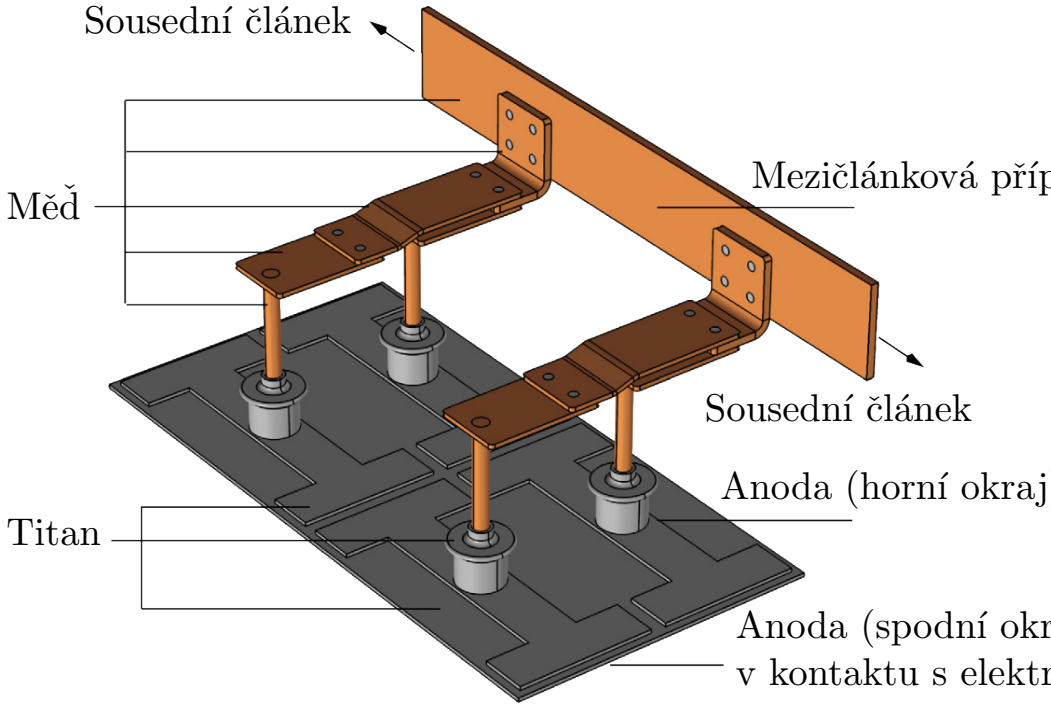
the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Lamellar busbar
The lamella busbar is used to connect the battery cell to the electrical equipment. To determine the thermal stress, it is necessary to extend the calculation with the calculation of a non-stationary temperature field (not a part of this example).

The electric current field is described by Laplace's equation in the form

$$\operatorname{div} \gamma \operatorname{grad} \varphi = 0$$

supplemented by the correct boundary conditions. A current with a current density of $8\ \mathrm{kA/m^2}$ is injected into the input port (lower part of the anode is in contact with the electrolyte).



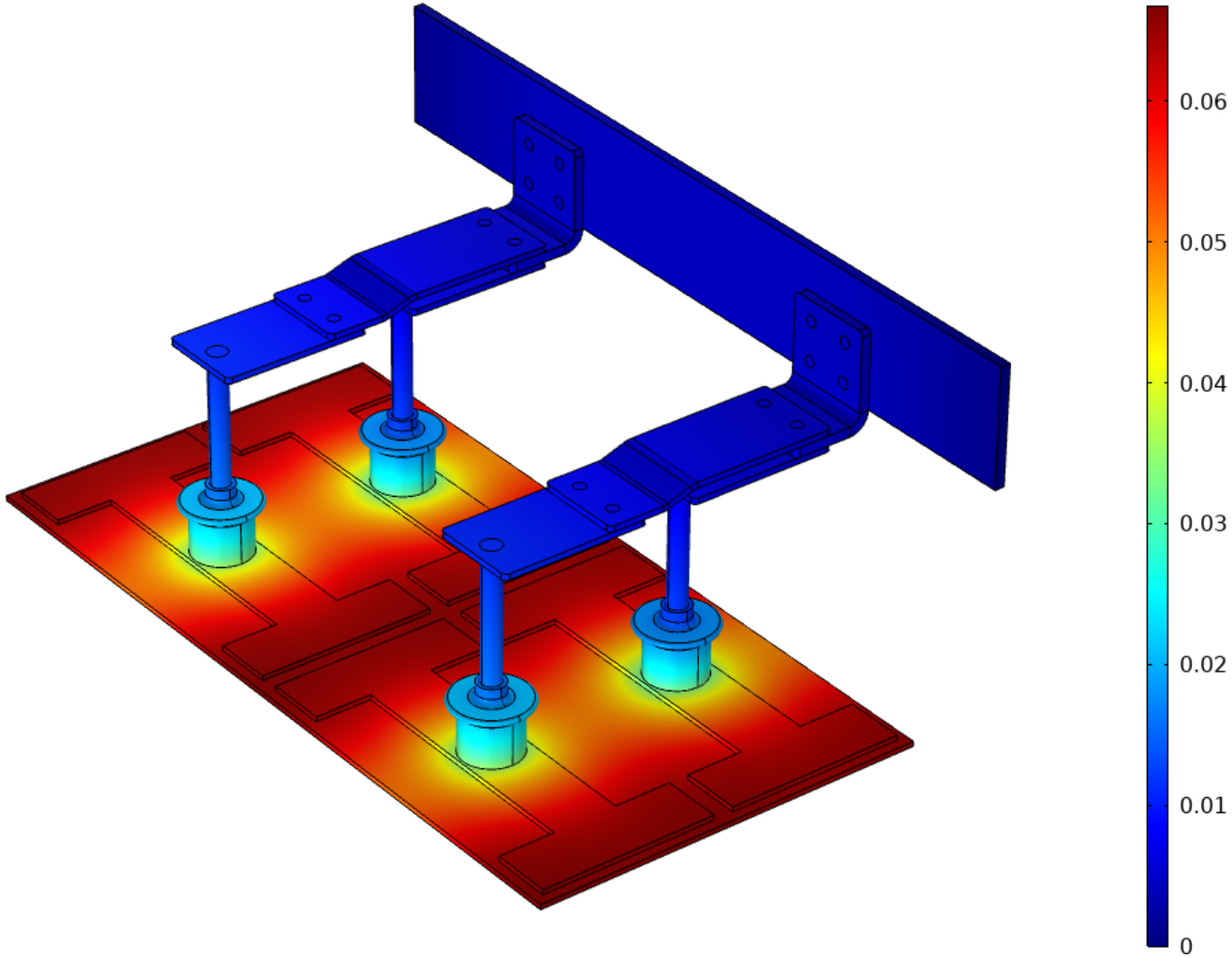
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Lamellar Busbar



Potential distribution

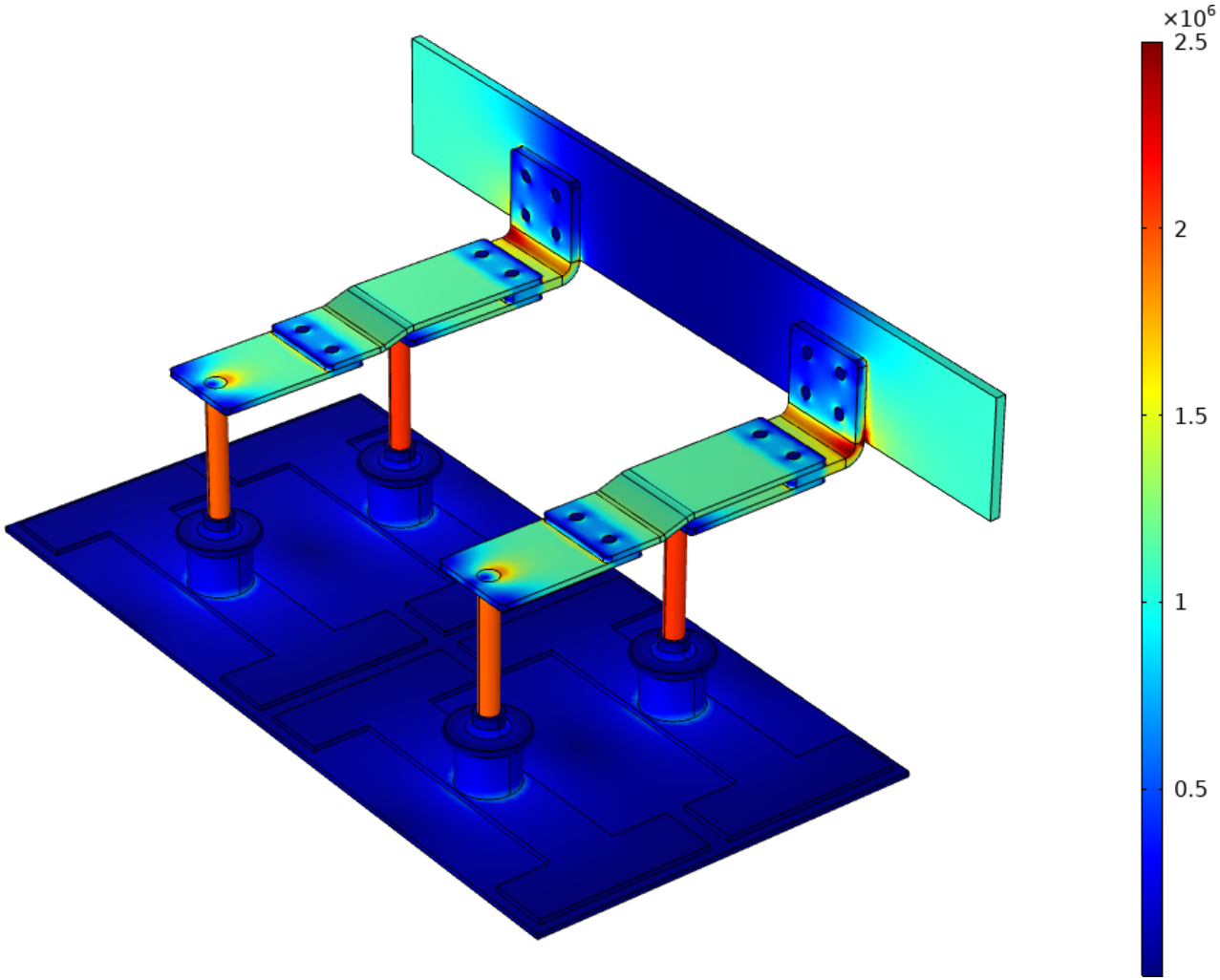
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Lamellar Busbar



Current density distribution

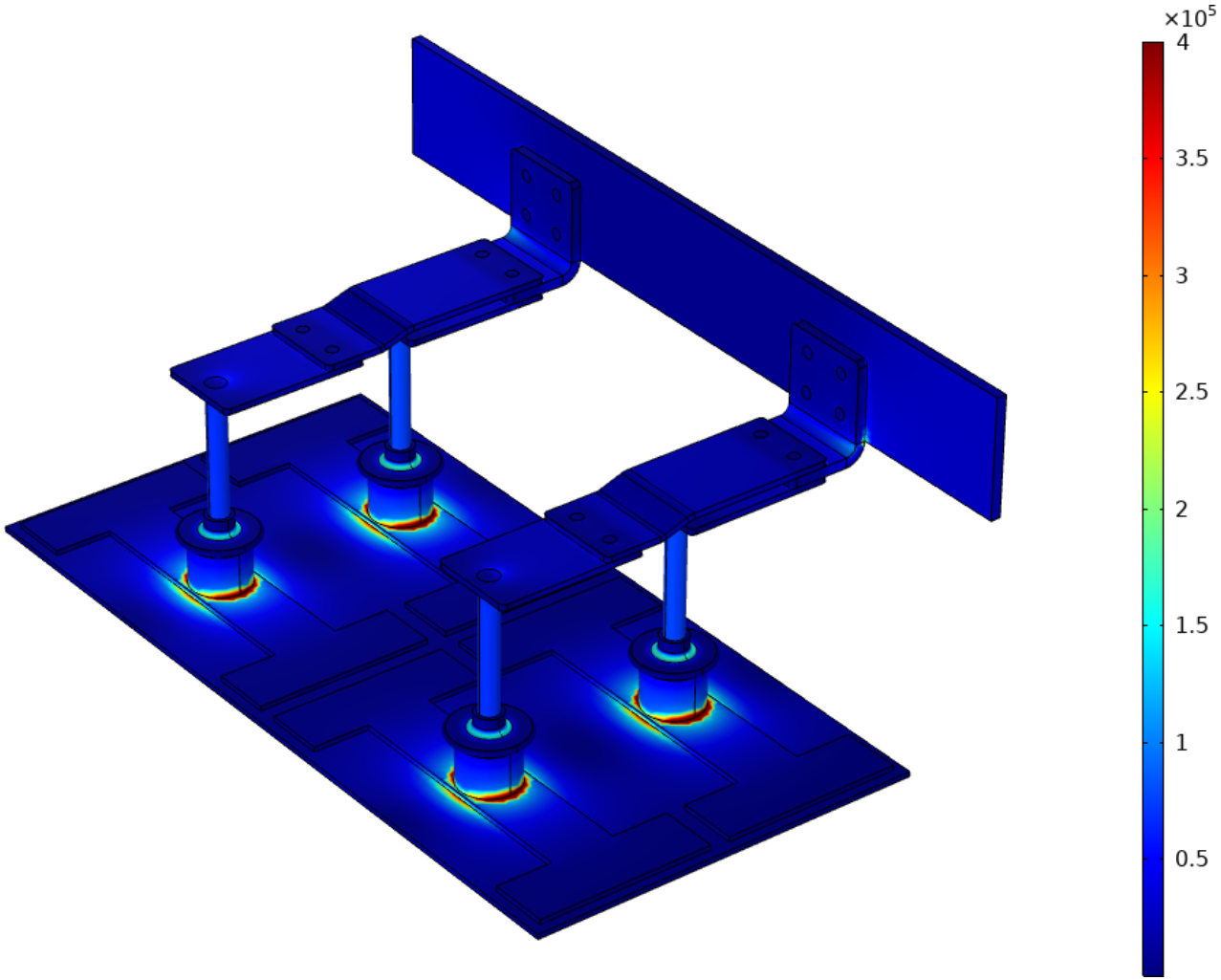
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Typical Examples from Electrostatic Field

Lamellar Busbar



Distribution of heat losses

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

the material was prepared under the auspices of ESF II (No. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239)

Děkuji za pozornost

Department of electrical engineering and computer modeling
Faculty of electrical engineering
University of West Bohemia in Pilsen